Combinaisons

Une **combinaison** est un choix d'objets, dans lequel l'ordre ne joue pas de rôle. Si les objets peuvent être choisis plusieurs fois, alors on parle d'une **combinaison avec répétitions**. Si chaque objet ne peut être choisi qu'une seule fois, alors on parle d'une **combinaison sans répétition**.
IDÉE : On choisit un ensemble ou un multiensemble. Les éléments peuvent être choisis parmi les différents éléments disponibles (avec ou sans répétition). On choisit donc les objets, mais l'ordre n'a pas d'importance.

1 Combinaisons sans répétition

Soient n, k des nombres naturels, avec $k \leq n$, alors on a n objets différents et on veut en choisir k objets. Ce qui compte est seulement le sous-ensemble des objets sélectionnés k et pas l'arrangement de ces objets. C.à.d. on veut choisir un sous-ensemble avec k éléments.

Combinaisons (sans répétition) :
(choisir un sous-groupe de k éléments parmi n)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Pourquoi : On peut présenter le problème de manière suivante : On ordonne tous les éléments et on en choisit les k premiers. Le nombre d'arrangements (permutations sans répétition) $n!$, mais maintenant on peut ordonner les k premiers éléments de $k!$ manières différentes. Même les $n-k$ éléments derniers peuvent être ordonner de $(n-k)!$ manières différentes. Seul compte pour un élément le fait d'être dans les k premiers ou les $n-k$ derniers. Il ne faut pas compter les ordres des bons et des mauvais éléments ($k!$ respectivement $(n-k)!$). C'est pourquoi on trouve exactement le coefficient binomial.

Exemple Lotto : Au Lotto on retire 6 boules de 49 boules au hasard. L'ordre n'a pas d'importance. Les boules retirées ne sont pas réutilisées, elles ne peuvent plus être choisies. Seul compte le sous-groupe avec les 6 nombres. Ici on a donc des combinaisons (sans répétition) de 49 éléments par classe de 6. Le nombre de choix possibles est

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,(49-6)!} = \frac{49!}{6!\,(43)!} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13.983.816$$

2 Combinaisons avec répétition

Soient n, k des nombres naturels. On a n objets et on choisit k fois un de ces objets n. Les objets choisis peuvent se répéter. L'ordre n'a pas d'importance :

Combinaisons (avec répétition) :
(choisir un multiensemble avec k éléments)

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Un tuyau pour mieux comprendre la formule :
„STARS and BARS“ :
On a k étoiles et $n-1$ barres qui les séparent (donc exactement n secteurs). Les secteurs représentent n objets. Le nombre d'étoiles entre les barres signifie combien de fois l'objet respectif a été choisi.
Exemple : Avec $n = 5$ objets différents on a 4 barres. Si $k = 7$ objets sont à choisir, on a par exemple

$$* \mid ** \mid\mid *** \mid *$$

si on choisit O_1 une fois, O_2 deux fois, O_3 pas du tout, O_4 trois fois, O_5 une fois.
Pour déclarer une combinaison, il ne faut donc qu'ordonner les étoiles et les barres. L'ensemble des étoiles+barres a $n+k-1$ éléments. On a $n+k-1 = k+(n-1)$, donc deux groupes d'objets non discernables, avec k, respectivement $n-1$ éléments. Il existe donc $\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$ combinaisons.

Exemple de l'oracle des oursons en gomme : On choisit $k = 5$ oursons dans un grand sachet d'oursons en gomme, en $n = 5$ différentes couleurs. L'ordre ne joue aucun rôle, on peut choisir tous les oursons en même temps. On considère la combinaison avec répétition. Il existe

$$\binom{5+5-1}{5} = \binom{9}{5} = \frac{9!}{5!\,4!} = 126$$

différentes combinaisons. Dont :
5 combinaisons, avec une unique couleur ;
40 combinaisons avec exactement deux couleurs. Les deux couleurs différentes peuvent être choisies de $10 = \frac{5 \cdot 4}{2}$ différentes manières (sans ordre) et les quatre types possibles par exemple pour (Rouge,Vert) sont $(1,4)$, $(4,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$;
60 combinaisons avec exactement trois couleurs différentes (Les trois couleurs différentes peuvent être choisit selon $10 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$ manières différentes et les six types possibles sont $(3,1,1)$, $(1,3,1)$, $(1,1,3)$, $(1,2,2)$, $(2,1,2)$, $(2,2,1)$;
20 combinaisons avec exactement quatre couleurs différentes (Les quatre couleurs différentes peuvent être choisit selon $5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!}$ manières différentes et les quatre types

possibles sont $(2,1,1,1)$, $(1,2,1,1)$, $(1,1,2,1)$, $(1,1,1,2)$;
1 combinaison avec toutes les 5 couleurs différentes (comme ici on a le même nombre de choix et de couleurs disponibles).
Si l'ordre jouait un rôle lors du tirage des oursons en gomme, on aurait un arrangement (avec répétition) et on aurait donc $5^5 = 3125$ possibilités.

Exemple Mastermind : On aboutira au même nombre $\binom{6+4-1}{5} = \binom{9}{5} = 126$ si on demande quel est le nombre de possibilités de sortir 4 pions de tous les pions avec 6 couleurs différentes (sans considération de l'ordre). Par contre dans le vrai jeu mastermind (avec considération de l'ordre) il existe $6^4 = 1296$ possibilités.

Exemple dés : Les dés ont sur leurs faces un à six points. Combien de tirs différents sont possibles avec trois dés ? Principalement $6^3 = 216$ tirs différents sont possibles, si on jette un dé après l'autre et si on considère l'ordre. Comme en jetant les dés tous en même temps, le tir de par exemple $(1,1,2)$ n'est pas plus discernable de $(1,2,1)$ que de $(2,1,1)$. Il y a

$$\left(\!\!\binom{6}{3}\!\!\right) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56$$

différents tirs (discernables) possibles. Ne pas à confondre avec la somme des points, laquelle ne peut aboutir qu'à 16 valeurs différentes (de 3 à 18).