

Exercices Combinaisons

1. Un tournoi sportif compte 8 équipes. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

Solution : Il faut choisir deux équipes parmi 8 dans toutes façons possibles. On a donc $\binom{8}{2} = 28$ choix possibles.

2. De combien de façons peut-on choisir 3 chiens et 2 chats parmi 10 chiens et 5 chats ?

Solution : On a $\binom{10}{3} = 120$ choix pour les chiens et $\binom{5}{2} = 10$ pour les chats, au total 1200 choix.

3. Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués. Quel est le nombre de choix possibles ? Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et une fille ? Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons ?

Solution : Choisir deux personnes sur 32 donne $\binom{32}{2} = 496$ choix. Choisir un garçon sur 19 donne 19 possibilités, et on a 13 possibilités pour les filles ; en totale on a $19 \cdot 13 = 247$ choix. Choisir deux personnes sur 19 donne $\binom{19}{2} = 171$ choix.

4. Dans une compétition de tennis, 8 personnes decident de jouer deux contre deux dans toutes façons possibles. Combien de parties il y a ?

Solution : On a $\binom{8}{2} = 28$ façon pour choisir le premier team, et $\binom{6}{2} = 15$ façon pour choisir le deuxième. En echangeant les teams on trouve le meme joueurs pour la partie, et donc on divise le nombre par 2 en obtenent 210.

5. Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4). On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les possibilités totales et après les possibilités de 1) ne tirer que 3 jetons verts 2) de ne tirer aucun jeton vert 3) de tirer au plus 2 jetons verts 4) de tirer exactement 1 jeton vert.

Solution : On a $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ possibilités en totale.

Tirer que 3 jetons verts : $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Tirer que 3 jetons rouges : $4 \cdot 3 \cdot 2$

Tirer au plus 2 jetons verts : $504 - 60 = 444$. Autre methode : Ne tirer aucun vert : $4 \cdot 3 \cdot 2$, tirer exactement un vert $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$, tirer exactement 2 verts $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4$

Tirer exactement 1 jeton vert : $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$

6. Quel est le nombre de m -uplets de nombres naturels strictement positif vérifiant

$$x_1 + \dots + x_m = n ?$$

Solution : Il fait couper le segment $[0, n]$ en choisissant m points distinct dans l'ensemble $\{1, \dots, n - 1\}$. On a donc $\binom{n-1}{m-1}$ m -uplets. (Ici l'ordre des summands est important.)

7. Quel est le nombre de façons d'aller de $(0, 0)$ à (m, n) avec $m, n > 0$ où à chaque pas l'une des coordonnées augmente d'une unité ?

Solution : On a $m + n$ pas à choisir, dont exactement m sont H (horizontales) et n sont verticaux V . On a $\binom{m+n}{m}$ possibilités.