Exercices Invariants

1. Soient donné un nombre impaire (disons, $2n+1$) de sachet de boules telle que, si on leve un sachet il soit possible de le diviser en deux partie de n sachets ayant le meme nombres de boules. Montrer que tout sachet ont le même nombre de boules

   Solution : Soit X le nombre totale de boules, et soit x_i le nombre de boules du i-ème sachet. Evidemment $X - x_i$ est paire pour tout i, et donc $x_i - x_j$ est paire pour tout i, j. Le sachet ont donc soit toutes un nombre paire de boules, soit toutes un nombre impaire de boules. Si ce nombre est paire : La propriété des sachets reste vraie si on divise toute nombres de boules par 2. Si ce nombre est paire : La propriété des sachets reste vraie si on enleve 1 boule de chaque sachet. Si les sachets ne sont pas tout vides on a diminué X en gardent la même propriété, et on peut alors raisonner par récurrence sur X.

2. On a une table ronde avec n places. Les n participant au diner ont ammené chacun un cadeau, qui posent sur une place de la table quelconque. Avant le diner on a donc n cadeaus sur les n places. Les participants arrivent sur un place quelconque du diner. Ils veut pas avoir leur cadeau. Est-ce que c'est possible avec une rotation des commensales qui personne ne trouve son propre cadeau ?

   Solution : On a n rotations possibles. Si dans chaque rotation il y a quelqun avec son propre cadeaux, alors avec chaque rotation il y a exactement un personne avec son propre cadeaux. Soient les personnes dans les places $1, \dots, n$ et soient les cadeaux dans les places $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$. Les differences $\sigma(i) - i$ sont alors tout nombres de 0 à $n-1$.

   $$\sum \sigma(i) - i = \frac{n(n-1)}{2} \mod n$$

   Mais aussi

   $$\sum \sigma(i) - i = \sum \sigma(i) - \sum i = 0 \mod n$$

   Donc on a $\frac{n(n-1)}{2} \mod n$ qui est possible si et seulement si $n-1$ est paire. Donc si n est paire on trouve avec une rotation une bonne configuration. Si n est impaire ca depend de la configuration initiale. Par exemple avec $h = \frac{n+1}{2}$

   $$\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, ..., \sigma(h+1) = 2\sigma(h+2) = 4, \sigma(2h-1) = 2h-1$$

   les differences $\sigma(i) - i$ sont alors tout nombres de 0 à $n-1$. Donc avec une rotation on ne trouve pas une bonne configuration.