Le principe d'inclusion et exclusion

1 Le principe d'inclusion-exclusion

Soient A et B deux ensembles finis. La formule du principe d'inclusion-exclusion (ou formule du crible) s'écrit

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

En d'autres termes, nous pouvons compter les éléments de la réunion de deux ensembles A et B en additionnant les cardinaux de ces deux ensembles et en soustrayant le cardinal de leur intersection. Cette formule est évidente : Avec $|A| + |B|$ on aurait compté deux fois les éléments de l'intersection.
Pour trois ensembles on a une formule similaire :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Pour plusieurs ensembles on a une formule générale comme suit :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$

Exemple du quotidien : Parmi les étudiants d'une école, 321 ont participé à une activité A, 211 à une activité B et 101 ont participé aux deux activités. Combien d'étudiants on participé à au moins une activité ? Grâce au principe d'inclusion-exclusion il y en a $321 + 211 - 101 = 431$.

2 Les inégalités du principe d'inclusion-exclusion

Si $1 \leq K \leq n$ est un entier impair, on a

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \leqslant \sum_{k=1}^{K} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| \ .$$

Si $1 \leq K \leq n$ est un entier pair, on a

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \geqslant \sum_{k=1}^{K} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$

On va donner une preuve pour ces inégalités (difficile à trouver). Partie de la preuve est une estimation pour les coefficients binomiaux.

2.1 Estimation pour les coefficients binomiaux

Soit $m \geq 2$ (le cas $m = 1$ étant banal). Pour $0 \leq D < m$ on montre par récursion

$$\sum_{i=0}^{D} (-1)^i \binom{m}{i} = (-1)^D \binom{m-1}{D}.$$

Pour $D = 0$ l'inégalité est vraie. Pour tout $0 \leq D \leq m-2$ supposons que l'inégalité vaille pour D et montrons-la pour $D+1$:

$$\sum_{i=0}^{D+1} (-1)^i \binom{m}{i} = (-1)^{D+1} \binom{m}{D+1} + \sum_{i=0}^{D} (-1)^i \binom{m}{i} = (-1)^{D+1} \binom{m}{D+1} + (-1)^D \binom{m-1}{D}$$

$$= (-1)^{D+1} \left(\binom{m}{D+1} - \binom{m-1}{D} \right) = (-1)^{D+1} \binom{m-1}{D+1}.$$

2.2 La preuve des inégalités

Dans la somme totale du principe d'inclusion et exclusion, un élément appartenant exactement à m ensembles ($1 \leq m \leq n$) est compté

$$x = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \ldots (-1)^{m-1} \binom{m}{m}$$

fois. Car $1 - x = (1-1)^m = 0$ on a $x = 1$, ce qui prouve le principe d'inclusion et exclusion en passant. Si on arrête la somme à $K \geq m$ (K inclus) l'élément ci-dessus est compté exactement 1 fois, ce qui est juste. Si on arrête la somme à $K < m$ (K inclus) l'élément ci-dessus est compté le nombre suivant de fois :

$$1 - \sum_{i=0}^{K} (-1)^i \binom{m}{i} = 1 - (-1)^K \binom{m-1}{K}$$

donc il a été compté trop de fois si K est impaire et trop peu de fois si K est paire. On conclut que si K est impair tous les éléments vont être comptés avec la somme tronquée une fois ou plus, et si K est paire une fois ou moins. Cela donne les inégalités cherchées.