Introduction

Nous commençons par une activité pour introduire la notion de découpage en districts.

Sondage rapide :

- On pose la question suivante aux élèves :

  "Quel est votre plat préféré : la pizza ou le hamburger ?"

- Chaque élève doit choisir :
  - P pour pizza
  - H pour hamburger

L' enseignant demande la préférence à 25 élèves et **écrit la lettre** correspondant sur le tableau, de façon à former un **carré de 5x5**, représentant une grille de 25 positions.

- Le professeur observe le quadrillage et annonce le **vainqueur général** en comptant simplement le nombre de lettre pour chaque plat, puis demande aux élèves de calculer **le pourcentage** de votes obtenu par le gagnant.

Application de districts :

On introduit maintenant la notion de districts électoraux :

On découpe la grille en districts de **5 cases** :

- Par colonnes
- Par lignes

Dans chaque district, on détermine le **plat préféré majoritaire**.

Ensuite, on compte le nombre de districts gagnés par chaque plat.

À la fin, on compare le résultat général basé sur **les votes directs** avec celui basé sur **le découpage en districts**, pour observer si le gagnant reste le même ou si cela change.

Modification des districts pour influencer le résultat :

Finalement, on propose de réarranger les districts.

- Objectif : Faire gagner l'aliment qui avait moins de voix au départ, en créant des districts stratégiques.
- Cela permettra d'introduire de manière concrète la notion de « gerrymandering » : montrer qu'en modifiant la répartition des groupes, on peut influencer et même changer le résultat d'une élection.

Vidéo complémentaire

Pour approfondir, on demande aux élèves de regarder la courte vidéo suivante :
(*Ne pas oublier d'activer la traduction automatique en français si nécessaire.*)

https://www.youtube.com/watch?v=bGLRJ12uqmk

Gerrymandering Niveau 1

Travail en binôme, puis correction en plénum

Les élèves découvrent que le mode de répartition des votes en districts peut influencer le résultat d'une élection. Même si un parti n'a pas la majorité absolue des votes, il peut remporter l'élection en gagnant dans un plus grand nombre de districts.

Nous vous suggérons de laisser aux élèves environ 10 minutes pour manipuler la grille en binôme. Ils devront eux-mêmes diviser la grille, d'abord verticalement, puis horizontalement, et déterminer le vainqueur de l'élection selon chaque répartition. Ensuite, un temps de 5 minutes peut être consacré à une correction collective en classe.

On suppose que neuf personnes vivent sur un territoire représenté par une grille. Voici les résultats de la dernière élection entre les partis **A** et **B**.

A	**B**	**A**
B	**A**	**B**
A	**A**	**B**

Combien de voix a obtenu le parti A ?	5 voix
Combien de voix a obtenu le parti B ?	4 voix
Qui a gagné l'élection ?	le parti A

	Nombre de voix	Pourcentage
Parti A	5	$\frac{5}{9} = 0{,}\overline{5} \sim 0{,}56 = 56\,\%$
Parti B	4	$\frac{4}{9} = 0{,}\overline{4} \sim 0{,}44 = 44\,\%$

On décide de répartir les 9 personnes en 3 groupes de 3.

D’abord, on partage la grille en trois groupes qu’on appelle des districts, en lignes verticales (chaque colonne est un district).

	D1	D2	D3
	A	B	A
	B	A	B
	A	A	B
Vainqueur	A	A	B

Si l’élection est remportée par le nombre de *districts* gagnés, et non par la quantité totale de voix, qui a gagné cette élection ?

Combien de districts ont été gagnés par le parti A ?	2 districts
Combien de districts ont été gagnés par le parti B ?	1 district
Qui a gagné l’élection ?	le parti A

Essayons maintenant de former les *districts* de manière horizontale.

				Vainqueur
D1	A	B	A	A
D2	B	A	B	B
D3	A	A	B	A

Combien de districts ont été gagnés par le parti A ?	2 districts
Combien de districts ont été gagnés par le parti B ?	1 district
Qui a gagné l’élection ?	le parti A

Est-il possible de diviser le territoire qui donne avantage à un parti en particulier ?

Les élèves peuvent proposer plusieurs stratégies de découpage, que l'on analyse et discute en groupe. Une fois une solution pertinente trouvée, on considère la définition du **gerrymandering**. Cela permet de formaliser ce que les élèves viennent de découvrir par l'expérience. Nous recommandons de prévoir environ 15 minutes pour cette partie.

Maintenant, choisis toi-même comment découper la grille en trois districts, en respectant les règles suivantes :

- Chaque district doit contenir exactement trois cases.
- Les cases d'un même district doivent être connectées par un côté (horizontalement ou verticalement, mais pas en diagonale).

Essaie de créer des districts qui avantagent le parti B. Explique comment différentes façons de créer les districts peuvent changer le résultat de cette élection.

A	B	A
B	A	B
A	A	B

Le parti B peut gagner l'élection en changeant la façon dont les districts sont dessinés : il perd largement dans un district, mais gagne tout juste dans les deux autres. Cela lui permet de remporter l'élection, même s'il a moins de voix au total que le parti A.

« Gerrymandering » = Le charcutage électoral

Le gerrymandering, c'est quand on dessine les limites des districts électoraux d'une certaine façon pour aider un parti à gagner. Même si ce parti n'a pas la majorité des votes, il peut gagner plus de districts en regroupant les votes à son avantage.

Gerrymandering Niveau 2

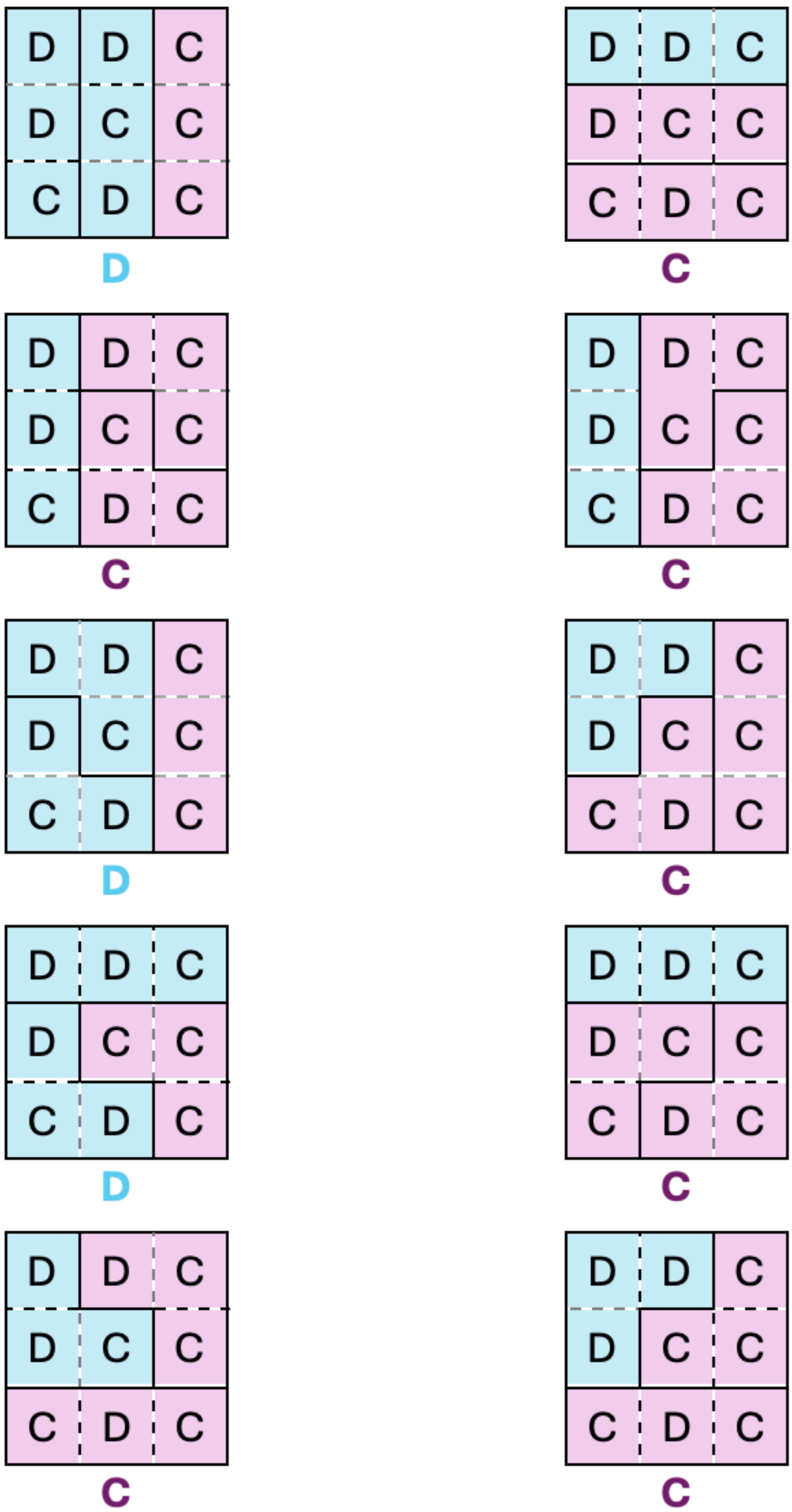
Travail individuel, puis correction rapide en plénum

Dans cette activité, on suggère de laisser les élèves travailler individuellement pendant environ 10 minutes pour explorer différentes manières de diviser la grille en districts de 3 électeurs. L'objectif est qu'ils réalisent que **seulement 3 de ces 10 configurations** permettent au **parti D**, pourtant minoritaire en nombre de voix, de remporter l'élection. Une correction collective rapide d'environ 5 minutes suffira généralement à visualiser les 10 possibilités : vous pouvez proposer à un élève volontaire de venir présenter au tableau les découpages qu'il a lui-même trouvés.

Voici un nouveau cas où le Parti **C** a obtenu plus de voix que le Parti **D**. Votre mission :

- Trouvez le plus de façons possibles de créer des districts de 3 votes (en respectant les règles précédemment énoncées).
- Pour chaque proposition indiquez clairement le parti qui gagne le plus de districts.

D	D	C
D	C	C
C	D	C



Il y a donc en tout **10** façons de répartir la grille en districts. Parmi elles, **3** sur **10** permettent au parti D (pourtant minoritaire en nombre de voix) de remporter l'élection.

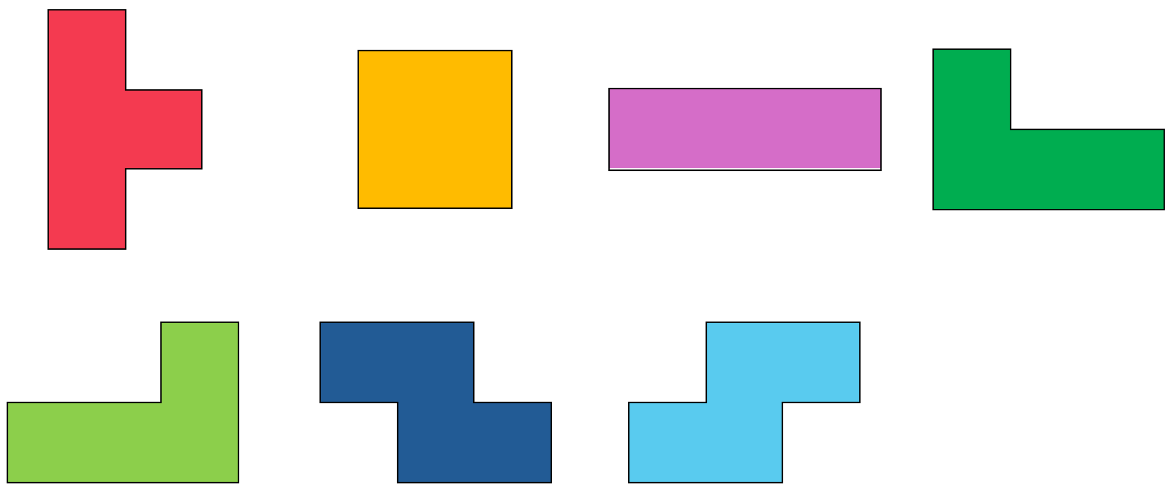
Exploration de districts façon Tetris

Travail individuel

Pour cette activité, on propose de laisser à nouveau les élèves travailler individuellement pendant 10 à 15 minutes. Leur mission est de créer le plus de découpages possibles en utilisant les pièces de type Tetris (aussi nommées Tétrominos), chacune représentant un district de 4 cases. À la fin de l'activité, les élèves sont invités à proposer une estimation du nombre total de découpages possibles, comme dans l'exercice précédent avec la grille 3×3, où il y en avait 10. La réponse correcte ici est 117, ce que les élèves ne trouveront probablement pas seuls. C'est le moment idéal pour projeter la page suivante et leur proposer de comparer leurs résultats avec cette liste (les cases à cocher permettent de voir combien de configurations ont été trouvées par la classe).

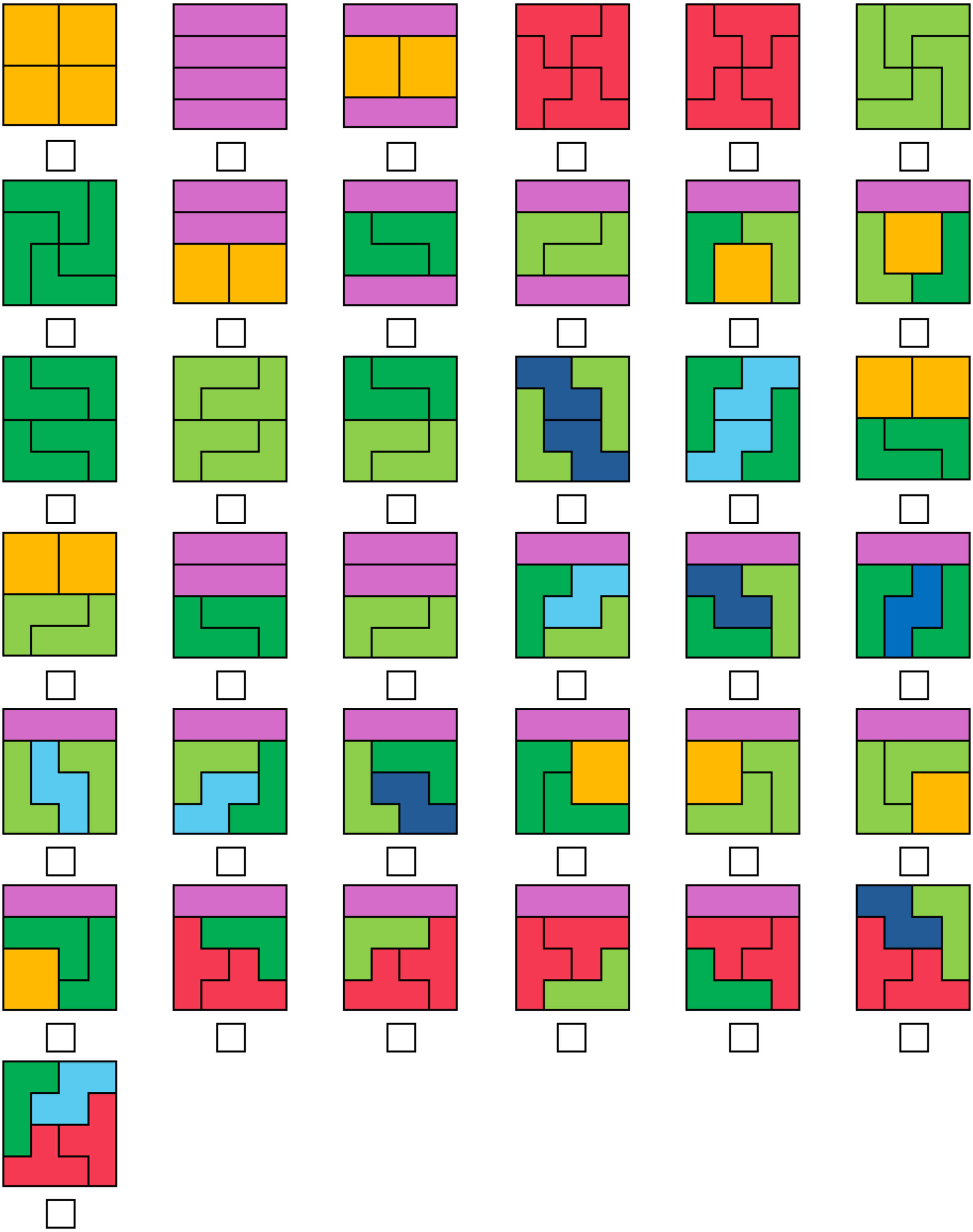
Cette activité permet de prendre conscience qu'en augmentant la taille de la grille, le nombre de configurations possibles augmente très fortement, ce qui rend le découpage électoral de plus en plus complexe.

Nous décidons de créer, pour une grille 4×4, des districts contenants chacun 4 votes (4 cases contiguës). Voici les formes possibles de districts à une rotation près :



Créer le plus de découpages possibles.

Voici toutes les possibilités (sans inclure les rotations) de répartir les districts sur une grille 4×4 en utilisant des districts en tétrominos



Gerrymandering Niveau 3

Travail en binôme, puis correction en plénum.

Pour ce niveau, on invite les élèves à travailler à nouveau en binôme pendant environ 10 minutes. Leur mission est de répartir eux-mêmes les votes de chaque électeur dans la grille, de manière à ce que **Julia**, bien qu'elle ait moins de voix qu'Alex, remporte l'élection grâce à un découpage stratégique des districts.

Cette activité est une excellente occasion d'observer comment les élèves abordent le défi : choisiront-ils une méthode simple et rapide, ou opteront-ils pour une stratégie plus élaborée ? L'objectif est qu'ils comprennent comment il est possible de faire gagner un candidat minoritaire en répartissant les voix de façon optimale dans les districts. Ils doivent aussi s'apercevoir que Julia peut gagner l'élection **même avec moins de voix**, à condition que le découpage électoral soit bien pensé, autrement dit, qu'un gerrymandering soit mis en place.

Pour la correction (environ 5 minutes), nous recommandons de partir des propositions concrètes des élèves afin de valoriser leur raisonnement, et de les guider vers la meilleure stratégie pour faire gagner Julia malgré son désavantage initial.

Les 25 élèves d'une classe doivent élire leur délégué de classe. Deux candidats se présentent : Julia et Alex.

Après le vote, le régent compte les bulletins et obtient le résultat suivant :

- ➔ Alex a obtenu 13 voix
- ➔ Julia a obtenu 12 voix

Réussissez-vous à répartir les voix pour Alex (A) et Julia (J) dans la grille ci-dessous (5×5 cases), telle que, si chaque ligne est un district de 5 élèves, **Julia gagne** l'élection ?

A	A	A	A	A
A	A	J	J	J
A	A	J	J	J
A	A	J	J	J
A	A	J	J	J

Julia aurait-elle pu gagner l'élection avec moins de 12 voix ? Quel est le nombre minimal de voix que Julia doit obtenir pour remporter la victoire, si l'on utilise un certain découpage stratégique des districts (*charcutage électoral*) ?

- Il y a en tout **25** électeurs, répartis sur **5** districts.
- Julia doit remporter **3** districts sur **5** pour gagner l'élection.
- Le nombre minimal de voix nécessaires pour remporter un district est **3**.
- Donc, au total, Julia a besoin d'au moins **9** voix pour pouvoir gagner l'élection, à condition que le découpage des districts le permette.

Généralisation pour n impair

Travail en plénum, puis en binôme et après retour en plénum

À l'issue de cette activité, les élèves disposeront d'une formule générale valable pour tous les cas, pour n impair.

Remarque : En cas de nombre pair d'électeurs, il faut également prévoir la possibilité d'un résultat nul dans les districts (égalité des voix). Voir le site web https://math.uni.lu/voting (version en français, chapitre *Gerrymandering – Niveau avancé*) pour un nombre arbitraire des électeurs et des tailles des districts.

Nombre d'électeurs dans un district, et nombre de district	n impair	7
Nombre minimal de districts nécessaires pour gagner l'élection	$\frac{n+1}{2}$	4
Nombre minimal de voix nécessaires dans un district pour le gagner	$\frac{n+1}{2}$	4
Nombre **minimal** de voix nécessaires pour gagner l'élection	$\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)$	16

Quel pourcentage minimum pour gagner une élection ?

Quelques exemples du nombre minimal de voix nécessaires :

n	nombre minimal de voix à gagner	pourcentage de votes
3	4	56%
5	9	44%
7	16	39%
9	25	36%
11	36	34%
13	49	29%
15	64	28%
101	2601	25%

Cette activité permet de mieux comprendre les formules et de voir que le pourcentage se stabilise autour de 25 % quand le nombre d'électeurs devient très grand.

Lorsque le nombre total d'électeurs devient très grand, que devient le pourcentage minimal de votes nécessaires pour gagner l'élection ?

On a

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{4}(n^2+2n+1)$$

donc le rapport avec le nombre total n^2 d'électeurs est

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)$$

Pour n grand, les deux derniers termes de la somme sont négligeables et le rapport est alors environ $\frac{1}{4}$ c.à.d. $25\ \%$.

Ces termes sont de plus en plus négligeables ; c'est pourquoi les pourcentages deviennent de plus en plus petits, mais ils restent supérieurs à 25 %.