Einführung

Wir beginnen mit einer Aktivität, um das Konzept der Einteilung in Distrikte einzuführen.

Kurze Umfrage:

Den Schülern wird folgende Frage gestellt:

„Was ist dein Lieblingsessen: Pizza oder Hamburger?“

- Jeder Schüler wählt:
  - P für Pizza
  - H für Hamburger

Der Lehrer erfragt die Präferenzen von 25 Schülern und notiert die entsprechende Buchstaben auf der Tafel, so dass ein **5×5-Quadrat** entsteht, das ein Raster mit 25 Positionen darstellt.

- Der Lehrer betrachtet das Raster, verkündet den **Gesamtsieger**, indem er die Stimmen für jedes Gericht zählt, und bittet die Schüler, den **prozentualen** Anteil der Stimmen des Gewinners zu berechnen.

Anwendung von Distrikten:

Nun wird das Konzept der **Distrikte (Wahlbezirke)** eingeführt:

Das Raster wird in **Distrikte mit je 5 Feldern** aufgeteilt:

- nach Spalten
- nach Reihen

In jedem Distrikt wird die Mehrheit ermittelt.

Anschließend wird gezählt, wie viele Distrikte von jedem Gericht gewonnen wurden.

Am Ende wird das Gesamtergebnis auf Basis der Direktstimmen mit dem Ergebnis auf Basis der Distrikte verglichen, um zu sehen, ob der Gewinner derselbe bleibt oder sich ändert.

Veränderung der Distrikte zur Beeinflussung des Ergebnisses:

Zum Schluss werden die Distrikte neu eingeteilt mit dem Ziel:

- **Das weniger beliebte Gericht** soll durch strategische Distrikte gewinnen.
- Dies führt anschaulich in den Begriff des **Gerrymandering** ein: Es wird gezeigt, dass durch eine andere Gruppierung das Ergebnis einer Wahl beeinflusst oder sogar umgekehrt werden kann.

Ergänzendes Video

Um dies weiter zu erforschen, werden die Schüler gebeten, sich das folgende kurze Video anzusehen:
(*aktivieren Sie ggf. die automatische Übersetzung ins Deutsche*):

https://www.youtube.com/watch?v=bGLRJ12uqmk

Gerrymandering - Stufe 1

Partnerarbeit und gemeinsame Auswertung

Die Schüler entdecken, dass die Aufteilung der Stimmen in Distrikte den Ausgang einer Wahl beeinflussen kann. Selbst wenn eine Partei nicht die absolute Mehrheit der Stimmen hat, kann sie die Wahl gewinnen, wenn sie mehr Distrikte gewinnt.

Lassen Sie den Schülern etwa 10 Minuten, um in Partnerarbeit mit dem Raster zu experimentieren – zuerst vertikal, dann horizontal –, um den Sieger der Wahl in jeder Variante zu bestimmen. Anschließend etwa 5 Minuten für eine gemeinsame Korrektur im Plenum.

Es wird angenommen, dass neun Personen in einem Gebiet leben, das durch ein Raster dargestellt wird. Hier sind die Ergebnisse der letzten Wahl zwischen den Parteien **A** und **B**.

A	B	A
B	A	B
A	A	B

Wie viele Stimmen hat Partei A bekommen?	5 Stimmen
Wie viele Stimmen hat Partei B bekommen?	4 Stimmen
Wer hat die Wahl gewonnen?	Partei A

	Anzahl der Stimmen	Prozentsatz
Partei A	5	$\frac{5}{9} = 0{,}\overline{5} \sim 0{,}56 = 56\,\%$
Partei B	4	$\frac{4}{9} = 0{,}\overline{4} \sim 0{,}44 = 44\,\%$

Wir teilen die 9 Personen in 3 Dreiergruppen auf.

Zuerst teilen wir das Raster in drei Gruppen, sogenannte **Distrikte**, in vertikalen Linien auf (jede Spalte ist ein Distrikt).

	D1	D2	D3
	A	B	A
	B	A	B
	A	A	B
Wahlsieger	A	A	B

Wenn die Wahl nach der Anzahl der gewonnenen Wahlkreise und nicht nach der Gesamtzahl der Stimmen entschieden wird, wer hat diese Wahl gewonnen?

Wie viele Wahlkreise wurden von Partei A gewonnen?	2 Distrikte
Wie viele Wahlkreise wurden von Partei B gewonnen?	1 Distrikt
Wer hat die Wahl gewonnen?	Partei A

Versuchen wir nun, die Distrikte horizontal zu bilden.

				Wahlsieger
D1	A	B	A	A
D2	B	A	B	B
D3	A	A	B	A

Wie viele Wahlkreise wurden von Partei A gewonnen?	2 Distrikte
Wie viele Wahlkreise wurden von Partei B gewonnen?	1 Distrikt
Wer hat die Wahl gewonnen?	Partei A

Ist es möglich, das Gebiet so aufzuteilen, dass eine bestimmte Partei einen Vorteil hat?

Die Schüler können verschiedene Strategien zur Neuaufteilung der Wahlkreise vorschlagen, die in Gruppen analysiert und diskutiert werden. Sobald eine geeignete Lösung gefunden ist, wird die Definition von Gerrymandering betrachtet. Dies ermöglicht den Schülern, ihre Erfahrungen zu formalisieren. Wir empfehlen, für diesen Teil etwa 15 Minuten einzuplanen.

Wählen Sie nun selbst, wie Sie das Raster in drei Distrikte unter Beachtung der folgenden Regeln aufteilen:

- Jeder Distrikt muss genau drei Quadrate enthalten.
- Quadrate im selben Distrikt müssen durch eine Seite verbunden sein (horizontal oder vertikal, aber nicht diagonal).

Versuchen Sie, Wahlkreise zu schaffen, die Partei B bevorzugen. Erklären Sie, wie unterschiedliche Arten der Wahlkreisbildung das Ergebnis dieser Wahl verändern können.

A	B	A
B	A	B
A	A	B

Partei B kann die Wahl gewinnen, indem sie die Wahlkreise anders einteilt: Sie verliert in einem Wahlkreis deutlich, gewinnt aber in den anderen beiden knapp. Dadurch kann sie die Wahl gewinnen, obwohl sie insgesamt weniger Stimmen hat als Partei A.

« Gerrymandering » = Wahlbezirksmanipulation

Gerrymandering bedeutet, dass die Grenzen der Distrikte so gezogen werden, dass eine Partei bevorzugt wird. Selbst wenn diese Partei nicht die Mehrheit der Stimmen hat, kann sie mehr Distrikte gewinnen, indem sie die Stimmen zu ihrem Vorteil gruppiert.

Gerrymandering - Stufe 2

Einzelarbeit, anschließend schnelle Korrektur im Plenum

In dieser Aktivität wird vorgeschlagen, dass die Schüler etwa 10 Minuten lang einzeln arbeiten und verschiedene Möglichkeiten zur Aufteilung des Rasters in Wahlkreise mit je drei Wählern erkunden.

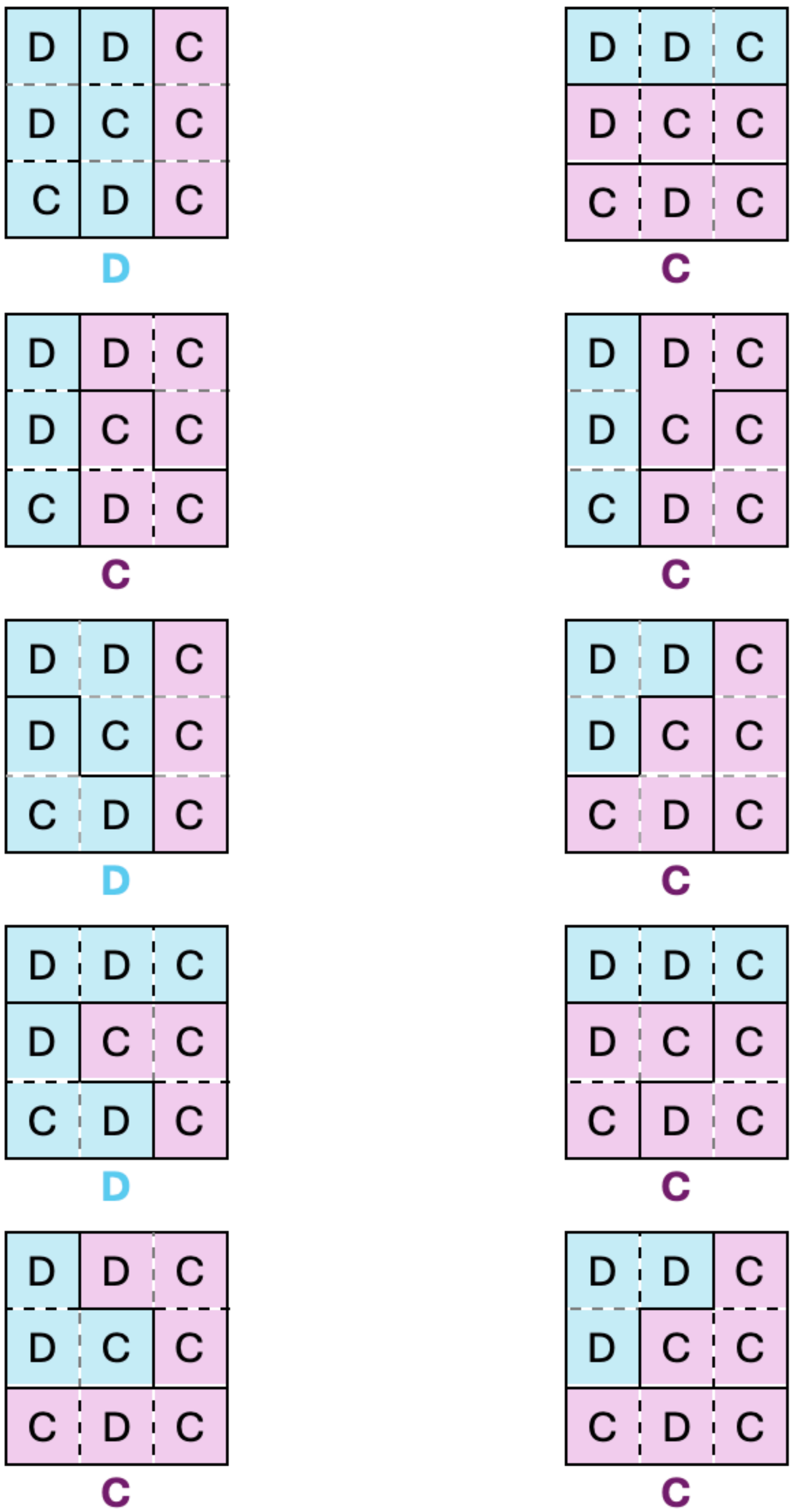
Ziel ist es, ihnen klarzumachen, dass **drei der zehn** Wahlkreise es der **Partei D** ermöglichen, die Wahl zu gewinnen, obwohl sie in der Minderheit ist. Um die 10 Möglichkeiten zu visualisieren, reicht in der Regel eine kurze gemeinsame Korrektur von etwa 5 Minuten:

Sie können einen freiwilligen Schüler bitten, herzukommen und die selbst gefundenen Ausschnitte an der Tafel zu präsentieren.

Hier ist ein neuer Fall, in dem Partei C mehr Stimmen erhielt als Partei D. Ihre Mission:

- Finden Sie möglichst viele Möglichkeiten, 3-Stimmen-Distrikte zu erstellen (unter Beachtung der zuvor genannten Regeln).
- Geben Sie für jeden Vorschlag die Partei an, die die meisten Wahlkreise gewinnt).

D	D	C
D	C	C
C	D	C



Es gibt zehn Möglichkeiten, das Raster in Distrikte aufzuteilen. **3** von **10** dieser Möglichkeiten ermöglichen es der Partei D (obwohl sie in der Minderheit ist), die Wahl zu gewinnen.

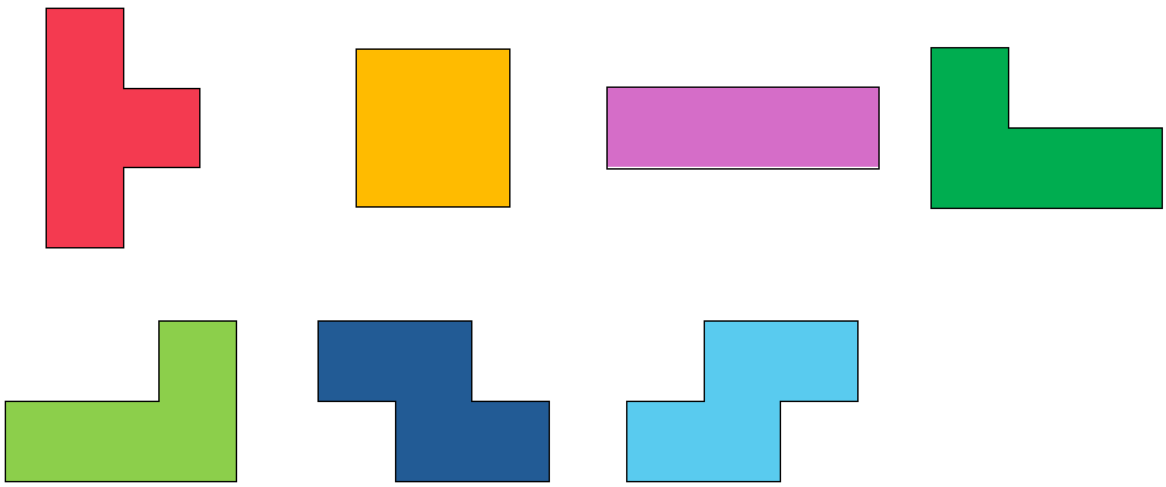
Tetris-artige Distrikte

Individuelle Arbeit

Für diese Aktivität empfehlen wir, die Schüler 10 bis 15 Minuten lang einzeln arbeiten zu lassen. Ihre Aufgabe besteht darin, mit Tetris-ähnlichen Steinen (auch Tetrominos genannt) so viele Unterteilungen wie möglich zu erstellen, wobei jeder Stein einen Distrikt mit 4 Quadraten in einem 4×4 Gitter darstellt.

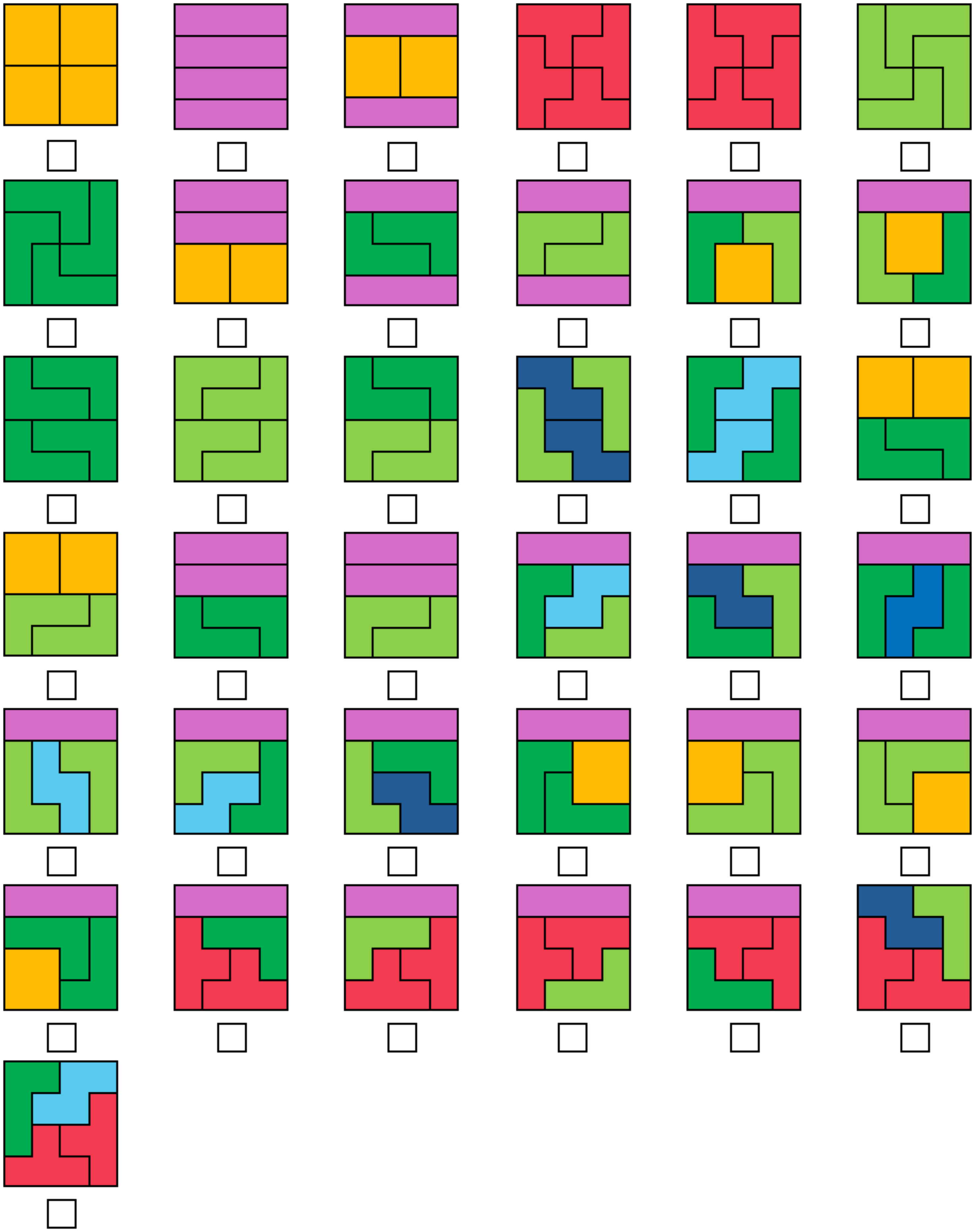
Ziel ist es, der Kreativität freien Lauf zu lassen. Am Ende der Aktivität werden die Schüler gebeten, die Gesamtzahl der möglichen Unterteilungen zu schätzen, wie in der vorherigen Übung mit dem 3×3-Raster, wo es 10 gab. Die richtige Antwort ist hier 117, die die Schüler wahrscheinlich nicht alleine herausfinden werden. Dies ist ein guter Zeitpunkt, die nächste Seite zu projizieren und sie zu bitten, ihre Ergebnisse mit dieser Liste zu vergleichen (anhand der Kontrollkästchen können Sie sehen, wie viele Konfigurationen die Klasse gefunden hat). Durch diese Aktivität wird uns bewusst, dass mit zunehmender Größe des Rasters die Anzahl der möglichen Konfigurationen erheblich zunimmt, was die Wahlaufteilung immer komplexer macht.

Wir bilden in einem 4×4 Raster Distrikte, die jeweils 4 Stimmen (4 zusammenhängende Felder) enthalten. Hier sind die möglichen Formen der Distrikte, bis auf eine Rotation:



Versuche, viele Unterteilungen zu erstellen.

Hier sind alle Möglichkeiten (bis auf eine Rotation) zur Unterteilungen mithilfe von Tetromino-Distrikten.



Gerrymandering - Stufe 3

Arbeit in Paaren, anschließend Korrektur im Plenum.

Auch für diese Stufe sind die Schüler eingeladen, für etwa 10 Minuten in Zweiergruppen zu arbeiten. Ihre Aufgabe besteht darin, die Stimmen der einzelnen Wähler im Raster so zu verteilen, dass **Julia**, obwohl sie weniger Stimmen als Alex hat, dank strategischer Distriktsaufteilung die Wahl gewinnt.

Diese Aktivität bietet eine gute Gelegenheit zu beobachten, wie die Schüler die Herausforderung angehen: Wählen sie eine schnelle und einfache Methode oder entscheiden sie sich für eine aufwendigere Strategie? Ziel ist es, dass sie verstehen, wie man einen Minderheitskandidaten durch optimale Verteilung der Stimmen auf die Wahlkreise zum Sieg führen kann. Sie sollten sich auch darüber im Klaren sein, dass Julia die Wahl **auch mit weniger Stimmen** gewinnen kann, vorausgesetzt, die Wahlkreiseinteilung ist gut durchdacht, d. h., Gerrymandering wird umgesetzt.

Für die Korrektur (ca. 5 Minuten) empfehlen wir, mit den konkreten Vorschlägen der Schüler zu beginnen, um ihre Argumentation zu verbessern und sie zur besten Strategie zu führen, damit Julia trotz ihres anfänglichen Nachteils gewinnt.

Die 25 Schüler einer Klasse müssen ihren Klassensprecher wählen. Zwei Kandidaten stehen zur Wahl: Julia und Alex.

Nach der Abstimmung zählt der Regent die Stimmzettel aus und erhält folgendes Ergebnis:

➔ Alex bekam 13 Stimmen

➔ Julia erhielt 13 Stimmen

Können Sie die Stimmen für Alex (A) und Julia (J) im 5×5 Raster unten so verteilen, dass **Julia die Wahl gewinnt**, wenn jede Zeile einen Distrikt mit 5 Schülern darstellt?

A	A	A	A	A
A	A	J	J	J
A	A	J	J	J
A	A	J	J	J
A	A	J	J	J

Hätte Julia die Wahl mit weniger als **12 Stimmen** gewinnen können?Wie viele **Mindeststimmen** müsste Julia erhalten, um den Sieg zu sichern, wenn eine strategische Aufteilung der Distrikte (gerrymandering) genutzt wird?

- Insgesamt gibt es **25** Wähler, verteilt auf **5** Wahlkreise.
- Julia muss **3** von **5** Wahlkreisen gewinnen, um die Wahl zu gewinnen.
- Die Mindestanzahl an Stimmen, die zum Gewinn eines Wahlkreises erforderlich ist, beträgt **3**.
- Insgesamt benötigt Julia also mindestens **9** Stimmen, um die Wahl gewinnen zu können, sofern die Wahlkreiseinteilung dies zulässt.

Verallgemeinerung für ungerade Zahlen

Arbeiten Sie im Plenum, dann paarweise und kehren Sie dann ins Plenum zurück.

Am Ende dieser Aktivität verfügen die Schüler über eine allgemeine Formel, die für alle ungerade Zahlen gültig ist.

Hinweis: Bei einer geraden Zahl muss auch die Möglichkeit einer Stimmengleichheit berücksichtigt werden. Informationen zu beliebigen Wählerzahlen und Distriktgrößen finden Sie auf der

Webseite https://math.uni.lu/voting (Deutsche Version, Kapitel Gerrymandering – Fortgeschrittenes Niveau).

Anzahl der Wähler in einem Distrikt, Anzahl der Distrikte	n ungerade	7
Mindestanzahl an Distrikte, die für einen Wahlsieg erforderlich sind	$\frac{n+1}{2}$	4
Mindestanzahl an Stimmen, die in einem Distrikt erforderlich sind, um ihn zu gewinnen	$\frac{n+1}{2}$	4
Mindestanzahl an Stimmen, die für den Wahlsieg erforderlich sind	$\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)$	16

Welcher Prozentsatz ist mindestens erforderlich, um eine Wahl zu gewinnen?

Einige Beispiele für die erforderliche Mindestanzahl an Stimmen:

n	Mindestanzahl an Stimmen, um zu gewinnen	Prozentsatz der Stimmen
3	4	56%
5	9	44%
7	16	39%
9	25	36%
11	36	34%
13	49	29%
15	64	28%
101	2601	25%

Durch diese Aktivität können Sie die Formeln besser verstehen und erkennen, dass sich der Prozentsatz bei etwa 25 % stabilisiert, wenn die Zahl der Wähler sehr groß wird.

Wenn die Gesamtzahl der Wähler sehr groß wird, wie hoch ist dann der Mindestprozentsatz an Stimmen, der für einen Wahlsieg erforderlich ist?

Wir haben

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{4}(n^2 + 2n + 1)$$

Das Verhältnis zur Gesamtzahl der Wähler beträgt also

$$\frac{1}{4}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

Für große n sind die letzten beiden Terme der Summe

dann ungefähr $\frac{1}{4}$ d.h. $25\ \%$.

Diese Faktoren spielen eine immer geringere Rolle, weshalb die Prozentsätze immer kleiner werden, aber immer noch über 25 % liegen.