

# MATH DAY

**These are the problems with proofs for the Senior category, from all Math Day editions. The solution to each problem is on the next page. For sustainability, please do not print this file.**

**Voici les problèmes avec démonstrations pour la catégorie Senior, issus de toutes les éditions du Math Day. La solution de chaque problème se trouve à la page suivante. Pour des raisons de durabilité, veuillez ne pas imprimer ce document.**

**Dies sind die Aufgaben mit Beweisen für die Kategorie Senior aus allen Ausgaben des Math Day. Die Lösung zu jeder Aufgabe befindet sich auf der nächsten Seite. Aus Gründen der Nachhaltigkeit drucken Sie dieses Dokument bitte nicht aus.**

**Problem 1.** Consider an  $n \times k$  grid consisting of  $nk$  unit squares, where  $n \geq k \geq 2$ . We say that a configuration of unit squares is valid if there are not three among them whose midpoints form three vertices of a rectangle aligned with the grid (namely, whose sides are parallel to the sides of the grid).

(1) Prove that there exists a valid configuration with  $n + k - 2$  unit squares.

In fact, any valid configuration has at most  $n + k - 2$  unit squares.

(2) Prove the above statement for  $k = 2$ .

(3) Prove the above statement by induction on  $n + k$  where  $n \geq k \geq 3$ .

Considérons une grille  $n \times k$  composée de  $nk$  carrés unitaires, où  $n \geq k \geq 2$ . Nous disons qu'une configuration de carrés unitaires est valide s'il n'y en a pas trois parmi eux dont les milieux forment trois sommets d'un rectangle aligné avec la grille (c'est-à-dire dont les côtés sont parallèles à ceux de la grille).

(1) Montrer qu'il existe une configuration valide comportant  $n + k - 2$  carrés unitaires.

En fait, toute configuration valide comporte au plus  $n + k - 2$  carrés unitaires.

(2) Démontrer l'énoncé ci-dessus pour  $k = 2$ .

(3) Démontrer l'énoncé ci-dessus par récurrence sur  $n + k$ , où  $n \geq k \geq 3$ .

Betrachten wir ein  $n \times k$  Gitter, das aus  $nk$  Einheitsquadraten besteht, wobei  $n \geq k \geq 2$  gilt. Wir nennen eine Konfiguration von Einheitsquadraten gültig, wenn es unter ihnen keine drei gibt, deren Mittelpunkte drei Eckpunkte eines zum Gitter ausgerichteten Rechtecks bilden (d. h. dessen Seiten parallel zu den Seiten des Gitters sind).

(1) Zeigen Sie, dass es eine gültige Konfiguration mit  $n + k - 2$  Einheitsquadraten gibt.

Tatsächlich enthält jede gültige Konfiguration höchstens  $n + k - 2$  Einheitsquadrate.

(2) Beweisen Sie die obige Aussage für  $k = 2$ .

(3) Beweisen Sie die obige Aussage durch Induktion über  $n + k$ , wobei  $n \geq k \geq 3$  gilt.

*Proof.* There is a valid configuration with  $n + k - 2$  squares, e.g. take all squares in the first row and first column except the left upper corner.

For  $k = 2$ , clearly, we can select at most  $n = n + 2 - 2$  fields (because we have only two columns, and having two numbers in the same row will prohibit to select any further field).

Now we proceed by induction on  $n + k$  where  $n \geq k \geq 3$ . For  $n = k = 3$ , we can select at most 3 fields in different rows. Now suppose that 2 fields are in the same row. Then we must exclude the remaining elements in those two columns and we can take at most two elements in the remaining column, for a total of  $4 = n + k - 2$  elements.

Consider a  $n \times k$  rectangle with selected fields and suppose that the statement holds for any smaller rectangle ( $n' \times k'$  with  $n' \geq k' \geq 3$  and  $n' + k' < n + k$ ). Taking one selected field, there cannot be selected other fields both in this row and column since the midpoints would form three vertices of a rectangle. Say, the column does not contain another selected field. Then omitting this column, the remaining rectangle can contain at most  $n + (k - 1) - 2$  selected fields by induction. So, the original rectangle can contain at most  $n + (k - 1) - 2 + 1 = n + k - 2$  selected fields.  $\square$

*Preuve.* Il existe une configuration valide pour  $n + k - 2$ ; par exemple, on peut prendre toutes les carrés de la première ligne et de la première colonne, sauf celui située dans le coin supérieur gauche.

Pour  $k = 2$ , il est clair que l'on peut sélectionner au plus  $n = n + 2 - 2$  carrés (car nous n'avons que deux colonnes, et le fait d'avoir deux carrés dans une même ligne empêche d'en sélectionner une autre).

Nous procédons maintenant par récurrence sur  $n + k$ , où  $n \geq k \geq 3$ . Pour  $n = k = 3$ , on peut sélectionner au plus 3 carrés situées dans des lignes distinctes. Supposons maintenant que deux carrés soient dans la même ligne. Alors nous devons exclure les autres éléments de ces deux colonnes, et nous pouvons choisir au plus deux éléments dans la colonne restante, pour un total de  $4 = n + k - 2$  éléments.

Considérons un rectangle  $n \times k$  avec des carrés sélectionnés, et supposons que l'énoncé soit vrai pour tout rectangle plus petit ( $n' \times k'$  avec  $n' \geq k' \geq 3$  et  $n' + k' < n + k$ ). En prenant un carré sélectionné, il ne peut pas y avoir d'autres carrés sélectionnés à la fois dans sa ligne et dans sa colonne, car leurs milieux formeraient trois sommets d'un rectangle. Supposons que la colonne ne contienne pas d'autre carré sélectionné. En supprimant cette colonne, le rectangle restant peut contenir au plus  $n + (k - 1) - 2$  carrés sélectionnés par hypothèse de récurrence. Ainsi, le rectangle initial peut contenir au plus

$$n + (k - 1) - 2 + 1 = n + k - 2$$

carrés sélectionnés.  $\square$

*Beweis.* Es gibt eine gültige Konfiguration mit  $n + k - 2$  Quadraten; man kann zum Beispiel alle Quadrate in der ersten Zeile und der ersten Spalte außer dem linken oberen Eckquadrat wählen.

Für  $k = 2$  ist klar, dass man höchstens  $n = n + 2 - 2$  Quadrate auswählen kann (da wir nur zwei Spalten haben und zwei Quadrate in derselben Zeile verhindern würden, dass ein weiteres Quadrat ausgewählt werden kann).

Nun führen wir den Beweis durch Induktion über  $n + k$ , wobei  $n \geq k \geq 3$  gilt. Für  $n = k = 3$  kann man höchstens 3 Quadrate in verschiedenen Zeilen auswählen. Man nehme nun an, zwei Quadrate liegen in derselben Zeile. Dann müssen die übrigen Quadrate in diesen beiden Spalten ausgeschlossen werden, und in der verbleibenden Spalte können höchstens zwei Quadrate gewählt werden, insgesamt also  $4 = n + k - 2$  Quadrate.

Betrachten wir nun ein  $n \times k$ -Rechteck mit ausgewählten Quadraten und nehmen an, dass die Aussage für jedes kleinere Rechteck ( $n' \times k'$  mit  $n' \geq k' \geq 3$  und  $n' + k' < n + k$ ) gilt. Wählt man ein ausgewähltes Quadrat, so darf es keine weiteren ausgewählten Quadrate sowohl in derselben Zeile als auch in derselben Spalte geben, da deren Mittelpunkte drei Eckpunkte eines Rechtecks bilden würden. Angenommen, die Spalte enthält kein weiteres ausgewähltes Quadrat. Entfernt man diese Spalte, so kann das verbleibende Rechteck nach Induktionsvoraussetzung höchstens  $n + (k - 1) - 2$  ausgewählte Quadrate enthalten. Somit kann das ursprüngliche Rechteck höchstens

$$n + (k - 1) - 2 + 1 = n + k - 2$$

ausgewählte Quadrate enthalten. □

**Problem 2.** Find all maps  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  which satisfy

$$f(x + y) - f(x - y) = 2y + f(-2)$$

*Hint: Plug in some easy values of  $x$  and  $y$  to gain preliminary information which may simplify the problem.*

*Hint: If you suppose that  $f$  is a linear function (meaning, its graph is a non-vertical line), which are the possible functions  $f$ ?*

Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfont

$$f(x + y) - f(x - y) = 2y + f(-2).$$

*Indication : Remplacer  $x$  et  $y$  par des valeurs simples afin d'obtenir des informations préliminaires pouvant simplifier le problème.*

*Indication : Si l'on suppose que  $f$  est une fonction linéaire (c'est-à-dire que son graphe est une droite non verticale), quelles sont les fonctions possibles  $f$  ?*

Bestimmen Sie alle Abbildungen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die

$$f(x + y) - f(x - y) = 2y + f(-2)$$

erfüllen.

*Hinweis: Setzen Sie einige einfache Werte für  $x$  und  $y$  ein, um erste Informationen zu gewinnen, die das Problem vereinfachen können.*

*Hinweis: Wenn man annimmt, dass  $f$  eine lineare Funktion ist (das heißt, ihr Graph ist eine nicht-vertikale Gerade), welche Funktionen  $f$  kommen dann infrage?*

*Proof.* Answer:  $f$  is given by  $f(x) = x + 2$ .

Putting  $y = 0$  gives  $f(x) - f(x) = f(-2)$  and hence  $f(-2) = 0$ . Putting  $x = z/2$  and  $y = z/2$  gives  $f(z) - f(0) = z$ , hence  $f(z) = z + f(0)$ . Taking  $z = -2$  gives  $f(-2) = -2 + f(0)$ , hence  $0 = -2 + f(0)$  and thus  $f(0) = 2$ . It follows  $f(x) = x + 2$ . This function has the requested property because

$$f(x + y) - f(x - y) = x + y + 2 - (x - y + 2) = 2y$$

and

$$2y + f(-2) = 2y + 0 = 2y.$$

□

*Preuve.* Réponse :  $f$  est donnée par  $f(x) = x + 2$ .

En posant  $y = 0$ , on obtient  $f(x) - f(x) = f(-2)$ , donc  $f(-2) = 0$ . En posant  $x = z/2$  et  $y = z/2$ , on obtient  $f(z) - f(0) = z$ , donc  $f(z) = z + f(0)$ . En prenant  $z = -2$ , on obtient  $f(-2) = -2 + f(0)$ , donc  $0 = -2 + f(0)$  et ainsi  $f(0) = 2$ . Il s'ensuit que  $f(x) = x + 2$ . Cette fonction possède la propriété demandée car

$$f(x + y) - f(x - y) = x + y + 2 - (x - y + 2) = 2y$$

et

$$2y + f(-2) = 2y + 0 = 2y.$$

□

*Beweis.* Antwort:  $f$  ist gegeben durch  $f(x) = x + 2$ .

Setzt man  $y = 0$ , so erhält man  $f(x) - f(x) = f(-2)$  und somit  $f(-2) = 0$ . Setzt man  $x = z/2$  und  $y = z/2$ , so erhält man  $f(z) - f(0) = z$ , also  $f(z) = z + f(0)$ . Für  $z = -2$  folgt  $f(-2) = -2 + f(0)$ , also  $0 = -2 + f(0)$  und damit  $f(0) = 2$ . Folglich ist  $f(x) = x + 2$ . Diese Funktion besitzt die geforderte Eigenschaft, denn

$$f(x + y) - f(x - y) = x + y + 2 - (x - y + 2) = 2y$$

und

$$2y + f(-2) = 2y + 0 = 2y.$$

□

**Problem 3.** We call a positive integer  $n$  nice if  $n$  can be written as the sum of six distinct positive integers that are divisors of  $n$ .

- (1) Exhibit a number between 20 and 30 that is nice.
- (2) How many multiples of 2025 are nice?
- (3) How many odd numbers are nice?

Nous appelons un entier positif  $n$  agréable s'il peut être écrit comme la somme de six entiers positifs distincts qui sont des diviseurs de  $n$ .

- (1) Donnez un nombre entre 20 et 30 qui est agréable.
- (2) Combien de multiples de 2025 sont agréables ?
- (3) Combien de nombres impairs sont agréables ?

Wir nennen eine positive ganze Zahl  $n$  schön, wenn  $n$  als die Summe von sechs verschiedenen positiven ganzen Zahlen geschrieben werden kann, die Teiler von  $n$  sind.

- (1) Zeigen Sie eine Zahl zwischen 20 und 30, die schön ist.
- (2) Wie viele Vielfache von 2025 sind schön?
- (3) Wie viele ungerade Zahlen sind schön?

- Proof.* (1)  $24 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8$  (the six summands are all distinct and they all divide 24).  
 (2) Multiplying this equality by  $2025 \cdot n$ , we see that the integer  $2025 \cdot 24n$  is nice for every positive integer  $n$ . Thus, infinitely many nice integers are divisible by 2025.  
 (3) We show that no odd number  $k$  is nice.  
 All divisors of  $k$  are odd and the sum of six odd numbers is even, so it cannot be equal to  $k$ .

□

- Preuve.* (1)  $24 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8$  (les six termes de la somme sont tous distincts et divisent tous 24).  
 (2) En multipliant cette égalité par  $2025 \cdot n$ , nous voyons que l'entier  $2025 \cdot 24n$  est agréable pour chaque entier positif  $n$ . Ainsi, il existe une infinité d'entiers agréables qui sont divisibles par 2025.  
 (3) Nous montrons qu'aucun nombre impair  $k$  n'est agréable.  
 Tous les diviseurs de  $k$  sont impairs et la somme de six nombres impairs est paire, donc elle ne peut pas être égale à  $k$ .

□

- Beweis.* (1)  $24 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8$  (die sechs Summanden sind alle verschieden und sie teilen alle 24).  
 (2) Indem wir diese Gleichung mit  $2025 \cdot n$  multiplizieren, sehen wir, dass die ganze Zahl  $2025 \cdot 24n$  für jede positive ganze Zahl  $n$  schön ist. Somit gibt es unendlich viele schöne ganze Zahlen, die durch 2025 teilbar sind.  
 (3) Wir zeigen, dass keine ungerade Zahl  $k$  schön ist.  
 Alle Teiler von  $k$  sind ungerade und die Summe von sechs ungeraden Zahlen ist gerade, also kann sie nicht gleich  $k$  sein.

□

**Problem 4.** Consider a  $16 \times 16$  grid whose cells can be either black or white. We apply a series of operations. An operation consists in choosing a line or column and changing the color of every cell it contains. The grid is initially all white.

- (1) Show that the order of the operations is not important.
- (2) Show that choosing the same line (respectively, column) twice in the series of operations is equivalent to not choosing it at all.
- (3) If  $l$  distinct lines and  $k$  distinct columns are chosen, show that there are exactly

$$16k + 16l - 2kl$$

black cells.

- (4) Is it possible to reach a configuration where exactly 44 cells are black?
- (5) Is it possible to reach a configuration where exactly 10 cells are black?

Considérons une grille  $16 \times 16$  dont les cellules peuvent être soit noires soit blanches. Nous appliquons une série d'opérations. Une opération consiste à choisir une ligne ou une colonne et à changer la couleur de chaque cellule qu'elle contient. La grille est initialement entièrement blanche.

- (1) Montrez que l'ordre des opérations n'est pas important.
- (2) Montrez que choisir la même ligne (respectivement, colonne) deux fois dans la série d'opérations est équivalent à ne pas la choisir du tout.
- (3) Si  $l$  lignes distinctes et  $k$  colonnes distinctes sont choisies, montrez qu'il y a exactement

$$16k + 16l - 2kl$$

cellules noires.

- (4) Est-il possible d'atteindre une configuration où exactement 44 cellules sont noires ?
- (5) Est-il possible d'atteindre une configuration où exactement 10 cellules sont noires ?

Betrachten wir ein  $16 \times 16$ -Gitter, dessen Zellen entweder schwarz oder weiß sein können. Wir wenden eine Reihe von Operationen an. Eine Operation besteht darin, eine Zeile oder eine Spalte auszuwählen und die Farbe jeder Zelle zu ändern, die sie enthält. Das Gitter ist anfänglich ganz weiß.

- (1) Zeigen Sie, dass die Reihenfolge der Operationen nicht wichtig ist.
- (2) Zeigen Sie, dass das zweimalige Wählen derselben Zeile (bzw. Spalte) in der Reihe von Operationen äquivalent dazu ist, sie gar nicht auszuwählen.
- (3) Wenn  $l$  verschiedene Zeilen und  $k$  verschiedene Spalten ausgewählt werden, zeigen Sie, dass es genau

$$16k + 16l - 2kl$$

schwarze Zellen gibt.

- (4) Ist es möglich, eine Konfiguration zu erreichen, bei der genau 44 Zellen schwarz sind?
- (5) Ist es möglich, eine Konfiguration zu erreichen, bei der genau 10 Zellen schwarz sind?

*Proof.* (1) The color of each cell is determined by the number of times that its line or its column are selected: it is white if that number is even and black otherwise. So the order of the operations is irrelevant.

- (2) If one same line (respectively, column) appears twice in the series of operations, for any of its cells the parity of the color changes will stay the same by removing the two operations, so we see no difference by removing the two operations.
- (3) Let us assume that we first select the  $l$  lines, then the  $k$  columns. When selecting a line, we add 16 black cells, thus after selecting the  $l$  lines there are  $16l$  black cells. Afterwards, whenever we select a column, we add  $16 - l$  black cells and  $l$  blacks cells turn white. Therefore, after the whole procedure, we have  $16l + (16 - 2l)k$  black cells.
- (4) The answer is affirmative. Indeed, we can solve  $16l + 16k - 2kl = 44$ .

$$\begin{aligned} 16l + 16k - 2kl &= 44 \\ \Leftrightarrow 8l + 8k - kl &= 22 \\ \Leftrightarrow 8l + 8k - kl - 64 &= 22 - 64 \\ \Leftrightarrow (8 - k)(l - 8) &= -42 \end{aligned}$$

A solution is, for example,  $k = 2$  and  $l = 1$ .

- (5) The answer is negative. Indeed, we can show that the equation  $16l + 16k - 2kl = 10$  has no solution with  $k, l \in \{0, \dots, 16\}$ . We have

$$\begin{aligned} 16l + 16k - 2kl &= 10 \\ \Leftrightarrow 8l + 8k - kl &= 5 \\ \Leftrightarrow 8l + 8k - kl - 64 &= 5 - 64 \\ \Leftrightarrow (8 - k)(l - 8) &= -59 \end{aligned}$$

As 59 is a prime number, either  $|l - 8|$  or  $|k - 8|$  must equal 59, which is not possible as  $k, l \in \{0, \dots, 16\}$ .

□

*Preuve.* (1) La couleur de chaque cellule est déterminée par le nombre de fois que sa ligne ou sa colonne est sélectionnée : elle est blanche si ce nombre est pair et noire sinon. Ainsi, l'ordre des opérations est sans importance.

- (2) Si une même ligne (respectivement, colonne) apparaît deux fois dans la série d'opérations, pour n'importe laquelle de ses cellules, la parité des changements de couleur restera la même en supprimant les deux opérations, donc nous ne voyons aucune différence en supprimant les deux opérations.
- (3) Supposons que nous sélectionnons d'abord les  $l$  lignes, puis les  $k$  colonnes. Lors de la sélection d'une ligne, nous ajoutons 16 cellules noires, donc après avoir sélectionné les  $l$  lignes, il y a  $16l$  cellules noires. Ensuite, chaque fois que nous sélectionnons une colonne, nous ajoutons  $16 - l$  cellules noires et  $l$  cellules noires deviennent blanches. Par conséquent, après toute la procédure, nous avons  $16l + (16 - 2l)k$  cellules noires.
- (4) La réponse est affirmative. En effet, nous pouvons résoudre  $16l + 16k - 2kl = 44$ .

$$\begin{aligned} 16l + 16k - 2kl &= 44 \\ \Leftrightarrow 8l + 8k - kl &= 22 \\ \Leftrightarrow 8l + 8k - kl - 64 &= 22 - 64 \\ \Leftrightarrow (8 - k)(l - 8) &= -42 \end{aligned}$$

Une solution est, par exemple,  $k = 2$  et  $l = 1$ .

- (5) La réponse est négative. En effet, nous pouvons montrer que l'équation  $16l + 16k - 2kl = 10$  n'a pas de solution avec  $k, l \in \{0, \dots, 16\}$ . Nous avons

$$\begin{aligned} 16l + 16k - 2kl &= 10 \\ \Leftrightarrow 8l + 8k - kl &= 5 \\ \Leftrightarrow 8l + 8k - kl - 64 &= 5 - 64 \\ \Leftrightarrow (8 - k)(l - 8) &= -59 \end{aligned}$$

Comme 59 est un nombre premier, soit  $|l - 8|$  soit  $|k - 8|$  doit être égal à 59, ce qui n'est pas possible car  $k, l \in \{0, \dots, 16\}$ .

□

*Beweis.* (1) Die Farbe jeder Zelle wird durch die Anzahl der Male bestimmt, dass ihre Zeile oder ihre Spalte ausgewählt wird: sie ist weiß, wenn diese Zahl gerade ist, und schwarz, wenn sie ungerade ist. Daher ist die Reihenfolge der Operationen irrelevant.

- (2) Wenn eine gleiche Zeile (bzw. Spalte) zweimal in der Reihe von Operationen erscheint, bleibt für jede ihrer Zellen die Parität der Farbänderungen gleich, wenn wir die beiden Operationen entfernen, sodass wir keinen Unterschied sehen, wenn wir die beiden Operationen entfernen.
- (3) Angenommen, wir wählen zunächst die  $l$  Zeilen und dann die  $k$  Spalten aus. Bei der Auswahl einer Zeile fügen wir 16 schwarze Zellen hinzu, sodass es nach der Auswahl der  $l$  Zeilen  $16l$  schwarze Zellen gibt. Danach fügen wir jedes Mal, wenn wir eine Spalte auswählen,  $16 - l$  schwarze Zellen hinzu, und  $l$  schwarze Zellen werden weiß. Daher haben wir nach dem gesamten Verfahren  $16l + (16 - l)k$  schwarze Zellen.
- (4) Die Antwort lautet ja. Tatsächlich können wir die Gleichung  $16l + 16k - 2kl = 44$  lösen.

$$\begin{aligned} 16l + 16k - 2kl &= 44 \\ \Leftrightarrow 8l + 8k - kl &= 22 \\ \Leftrightarrow 8l + 8k - kl - 64 &= 22 - 64 \\ \Leftrightarrow (8 - k)(l - 8) &= -42 \end{aligned}$$

Eine Lösung ist zum Beispiel  $k = 2$  und  $l = 1$ .

- (5) Die Antwort lautet nein. Tatsächlich können wir zeigen, dass die Gleichung  $16l + 16k - 2kl = 10$  keine Lösung mit  $k, l \in \{0, \dots, 16\}$  hat. Wir haben

$$\begin{aligned} 16l + 16k - 2kl &= 10 \\ \Leftrightarrow 8l + 8k - kl &= 5 \\ \Leftrightarrow 8l + 8k - kl - 64 &= 5 - 64 \\ \Leftrightarrow (8 - k)(l - 8) &= -59 \end{aligned}$$

Da 59 eine Primzahl ist, muss entweder  $|l - 8|$  oder  $|k - 8|$  gleich 59 sein, was nicht möglich ist, da  $k, l \in \{0, \dots, 16\}$ .

□

**Problem 5.** *A regular octagon is inscribed in a square (the sides of the square extending four sides of the octagon). Compute the ratio between the area of the square and the area of the octagon.*

---

*Un octogone régulier est inscrit dans un carré (les côtés du carré prolongent quatre côtés de l'octogone). Calculez le rapport entre la surface du carré et la surface de l'octogone.*

---

*Ein regelmäßiges Achteck ist in ein Quadrat eingeschrieben (die Seiten des Quadrats verlängern vier Seiten des Achtecks). Berechnen Sie das Verhältnis zwischen der Fläche des Quadrats und der Fläche des Achtecks.*

*Proof.* Call  $h$  the height of the octagon, meaning the distance between two parallel opposite sides. Then the area of the square is  $h^2$ .

Call  $s$  the side-length of the octagon. The complement of the octagon in the square consists of four triangles that are each the half of a (smaller) square with side  $\frac{s}{\sqrt{2}}$ . So we have

$$h = s + 2 \times \frac{s}{\sqrt{2}} = s(1 + \sqrt{2})$$

and hence

$$h^2 = s^2(1 + \sqrt{2})^2 = s^2(3 + 2\sqrt{2}).$$

The area of the octagon is then

$$h^2 - 2 \times \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 = s^2(2 + 2\sqrt{2}).$$

The requested ratio is then

$$\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

An alternative argument is if instead of  $s$  we use the side-length  $t$  of the four little triangles in the corners. Also, we can assume that the square is a unit square (i.e.  $h = 1$ ). Then the side-length of the octagon is  $t\sqrt{2}$ , so the side-length of the big square is  $1 = (2 + \sqrt{2})t$ . This gives  $t = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ . The area of the octagon is

$$1 - 2t^2 = 1 - 2\left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2} - 2.$$

Thus, the requested ratio is

$$\frac{1}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

□

*Preuve.* Désignons par  $h$  la hauteur de l'octogone, c'est-à-dire la distance entre deux côtés parallèles opposés. Ainsi, l'aire du carré est  $h^2$ . Désignons par  $s$  la longueur du côté de l'octogone. Le complément de l'octogone dans le carré se compose de quatre triangles, chacun étant la moitié d'un carré (plus petit) avec un côté de  $\frac{s}{\sqrt{2}}$ . Ainsi, on a

$$h = s + 2 \times \frac{s}{\sqrt{2}} = s(1 + \sqrt{2}),$$

et donc

$$h^2 = s^2(1 + \sqrt{2})^2 = s^2(3 + 2\sqrt{2}).$$

L'aire de l'octogone vaut alors

$$h^2 - 2 \times \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 = s^2(2 + 2\sqrt{2}).$$

Enfin, le rapport demandé est

$$\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Un autre argument consiste à utiliser, au lieu de  $s$ , la longueur du côté  $t$  des quatre petits triangles dans les coins. De plus, nous pouvons supposer que le carré est un carré unitaire (c'est-à-dire  $h = 1$ ). Ensuite, la

longueur du côté de l'octogone est  $t\sqrt{2}$ , donc la longueur du côté du grand carré est  $1 = (2 + \sqrt{2})t$ . Cela donne  $t = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ . L'aire de l'octogone est alors

$$1 - 2t^2 = 1 - 2\left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2} - 2.$$

Ainsi, le ratio demandé est

$$\frac{1}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

□

*Beweis.* Es sei  $h$  die Höhe des Achtecks, also der Abstand zwischen zwei parallelen, gegenüberliegenden Seiten. Dann ist der Flächeninhalt des Quadrats  $h^2$ .

Es sei  $s$  die Seitenlänge des Achtecks. Das Komplement des Achtecks im Quadrat besteht aus vier Dreiecken, welche jeweils die Hälfte eines (kleineren) Quadrats mit der Seitenlänge  $\frac{s}{\sqrt{2}}$  sind. Folglich gilt

$$h = s + 2 \times \frac{s}{\sqrt{2}} = s(1 + \sqrt{2})$$

und somit

$$h^2 = s^2(1 + \sqrt{2})^2 = s^2(3 + 2\sqrt{2}).$$

Die Fläche des Achtecks ist dann

$$h^2 - 2 \times \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 = s^2(2 + 2\sqrt{2}).$$

Das gesuchte Verhältnis ist

$$\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Ein alternative Argumentation ist, statt  $s$  die Seitenlänge  $t$  der vier kleinen Dreiecke in den Ecken zu verwenden. Wir können auch annehmen, dass das Quadrat ein Einheitsquadrat ist (d.h.  $h = 1$ ). Dann ist die Seitenlänge des Achtecks  $t\sqrt{2}$ , also ist die Seitenlänge des großen Quadrats  $1 = (2 + \sqrt{2})t$ . Das ergibt  $t = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Die Fläche des Achtecks ist

$$1 - 2t^2 = 1 - 2\left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2} - 2.$$

Folglich gilt für das gesuchte Verhältnis

$$\frac{1}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

□

**Problem 6.** In a tournament, each contestant plays with each other contestant exactly once. The contestants are partitioned into two non-empty groups with  $A$  participants and  $B$  participants respectively (suppose without loss of generality that  $A \leq B$ ). The first phase of the tournament sees the matches between contestants that belong to the same group. The second phase sees the matches between contestants of different groups. By chance, there is the same number of matches in the first phase and in the second phase. Our goal is to find the possible number of contestants.

Comment: We use the notation  $\binom{n}{k}$  for the binomial coefficient  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

- (1) Prove that  $B^2 - (2A + 1)B + A^2 - A = 0$ .  
 (2) Prove that

$$B = \frac{2A + 1 + \sqrt{8A + 1}}{2}.$$

- (3) Letting  $8A + 1 = v^2$  with  $v \geq 0$ , prove that

$$A = \binom{\frac{v+1}{2}}{2} \text{ and } B = \binom{\frac{v+3}{2}}{2}.$$

- (4) Prove that for  $n = \frac{v+1}{2}$  we have

$$A + B = n^2.$$

- (5) Prove that the possible number of the participants to the tournament is precisely any value of  $n^2$  for  $n \geq 2$  (if  $A$  and  $B$  are suitably chosen).

Dans un tournoi, chaque participant joue exactement une fois contre chaque autre participant. Les participants sont répartis en deux groupes non vides de  $A$  et  $B$  participants respectivement (supposons sans perte de généralité que  $A \leq B$ ). La première phase du tournoi comporte seulement les matchs entre les participants appartenant au même groupe. La deuxième phase comporte seulement les matchs entre les participants des deux groupes différents. Par chance, il y a le même nombre de matchs dans la première phase que dans la deuxième phase. L'objectif est de trouver le nombre possible de participants.

Remarque: On utilise la notation  $\binom{n}{k}$  pour le coefficient binomial  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

- (1) Montrer que  $B^2 - (2A + 1)B + A^2 - A = 0$ .  
 (2) Montrer que

$$B = \frac{2A + 1 + \sqrt{8A + 1}}{2}.$$

- (3) En posant  $8A + 1 = v^2$  avec  $v \geq 0$ , montrer que

$$A = \binom{\frac{v+1}{2}}{2} \text{ et } B = \binom{\frac{v+3}{2}}{2}.$$

- (4) Montrer que pour  $n = \frac{v+1}{2}$ , on a

$$A + B = n^2.$$

- (5) Montrer que le nombre possible de participants au tournoi est précisément toute valeur de la forme  $n^2$  pour  $n \geq 2$  (si  $A$  et  $B$  sont convenablement choisis).

In einem Wettkampf spielt jeder Teilnehmer gegen jeden anderen Teilnehmer genau einmal. Die Teilnehmer werden in zwei nichtleere Gruppen mit  $A$  bzw.  $B$  Teilnehmern eingeteilt (ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass  $A \leq B$ ). In der ersten Phase des Wettkamps finden die Spiele zwischen

Teilnehmern statt, die derselben Gruppe angehören. In der zweiten Phase werden die Spiele zwischen Teilnehmern verschiedener Gruppen ausgetragen. Zufällig gibt es in der ersten und in der zweiten Phase die gleiche Anzahl von Spielen. Ziel ist es, die mögliche Anzahl der Teilnehmer zu ermitteln.

Bemerkung: Wir verwenden die Schreibweise  $\binom{n}{k}$  für den Binomialkoeffizienten  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

(1) Zeigen Sie  $B^2 - (2A + 1)B + A^2 - A = 0$ .

(2) Zeigen Sie

$$B = \frac{2A + 1 + \sqrt{8A + 1}}{2}.$$

(3) Man setze  $8A + 1 = v^2$  mit  $v \geq 0$ . Zeigen Sie, dass dann

$$A = \binom{\frac{v+1}{2}}{2} \text{ und } B = \binom{\frac{v+3}{2}}{2} \text{ gilt.}$$

(4) Zeigen Sie, dass für  $n = \frac{v+1}{2}$  gilt

$$A + B = n^2.$$

(5) Beweisen Sie, dass die mögliche Teilnehmerzahl des Turniers genau eine Zahl der Form  $n^2$  mit  $n \geq 2$  ist (falls  $A$  und  $B$  geeignet gewählt sind).

*Proof.* The condition means the equation

$$\binom{A}{2} + \binom{B}{2} = AB.$$

So we have  $\frac{A(A-1)}{2} + \frac{B(B-1)}{2} = AB$ . After ordering according to the powers of  $B$ , we obtain

$$B^2 - (2A + 1)B + A^2 - A = 0.$$

By the quadratic formula,

$$B = \frac{2A + 1 \pm \sqrt{(2A + 1)^2 - 4(A^2 - A)}}{2} = \frac{2A + 1 \pm \sqrt{8A + 1}}{2}.$$

The solution with the plus sign clearly satisfies  $B \geq A$  but we must discard the solution with the minus sign. Indeed, we have

$$A > \frac{2A + 1 - \sqrt{8A + 1}}{2}$$

because this inequality is equivalent to

$$\sqrt{8A + 1} > 1.$$

Let  $8A + 1 = v^2$  (thus,  $v \geq 3$  and  $v$  is odd). Then we have

$$A = \frac{v^2 - 1}{8} = \frac{\frac{(v+1)}{2} \frac{(v-1)}{2}}{2} = \binom{\frac{v+1}{2}}{2}$$

and

$$B = \frac{2A + 1 + \sqrt{8A + 1}}{2} = \frac{\frac{v^2-1}{4} + 1 + v}{2} = \frac{v^2 + 4v + 3}{8} = \frac{\frac{(v+3)}{2} \frac{(v+1)}{2}}{2} = \binom{\frac{v+3}{2}}{2}.$$

Thus  $A = \binom{n}{2}$  and  $B = \binom{n+1}{2}$ , where  $n = \frac{v+1}{2} \geq 2$  (since  $v$  is odd,  $n$  is an integer). So we have

$$A + B = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2.$$

An easy calculation shows that these values of  $n$  with the corresponding values for  $A$  and  $B$  satisfy the condition. Indeed, we just have to split up the contestants into two groups as suggested above:

$$A = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad B = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

So on the one hand we have

$$AB = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4}.$$

On the other hand we have

$$\binom{B}{2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} \left( \frac{n(n+1)}{2} - 1 \right)}{2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)-2}{2}}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)(n+2)}{8}$$

and similarly

$$\binom{A}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)(n-2)}{8}.$$

We deduce that

$$\binom{A}{2} + \binom{B}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)(2n)}{8} = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4}.$$

So we have proven that the number of contestants must be of the form  $n^2$  for  $n \geq 2$  and we have also proven that each of these numbers, for a suitable choice of  $A$  and  $B$ , satisfies the requested condition that

$$\binom{A}{2} + \binom{B}{2} = AB.$$

□

*Preuve.* La condition donnée se traduit par l'équation

$$\binom{A}{2} + \binom{B}{2} = AB.$$

On a alors  $\frac{A(A-1)}{2} + \frac{B(B-1)}{2} = AB$ . En réorganisant selon les puissances de  $B$ , on obtient

$$B^2 - (2A + 1)B + A^2 - A = 0.$$

Par la formule quadratique, on a alors

$$B = \frac{2A + 1 \pm \sqrt{(2A + 1)^2 - 4(A^2 - A)}}{2} = \frac{2A + 1 \pm \sqrt{8A + 1}}{2}.$$

La solution avec le signe plus satisfait clairement  $B \geq A$ , mais nous devons rejeter la solution avec le signe moins. En effet, nous avons

$$A > \frac{2A + 1 - \sqrt{8A + 1}}{2}$$

car cette inégalité équivaut à

$$\sqrt{8A + 1} > 1.$$

Écrivons  $8A + 1 = v^2$ , de telle façon que  $v \geq 3$  et  $v$  est un nombre impair. On a alors

$$A = \frac{v^2 - 1}{8} = \frac{\frac{(v+1)}{2} \frac{(v-1)}{2}}{2} = \binom{\frac{v+1}{2}}{2}$$

et

$$B = \frac{2A + 1 + \sqrt{8A + 1}}{2} = \frac{\frac{v^2-1}{4} + 1 + v}{2} = \frac{v^2 + 4v + 3}{8} = \frac{\frac{(v+3)}{2} \frac{(v+1)}{2}}{2} = \binom{\frac{v+3}{2}}{2}.$$

Ainsi  $A = \binom{n}{2}$  et  $B = \binom{n+1}{2}$  avec  $n = \frac{v+1}{2} \geq 2$  ( $n$  est un nombre entier car  $v$  est impair). D'où

$$A + B = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2.$$

Un calcul simple montre que ces valeurs de  $n$  avec les valeurs correspondantes pour  $A$  et  $B$  satisfont la condition. En effet, il suffit de diviser les concurrents en deux groupes comme suggéré précédemment :

$$A = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad B = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

D'une part, nous avons

$$AB = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4}.$$

D'autre part, nous avons

$$\binom{B}{2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} \left( \frac{n(n+1)}{2} - 1 \right)}{2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)-2}{2}}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)(n+2)}{8},$$

et de manière similaire, on obtient

$$\binom{A}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)(n-2)}{8}.$$

On en déduit que

$$\binom{A}{2} + \binom{B}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)(2n)}{8} = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4}.$$

Nous avons ainsi démontré que le nombre de participants doit être de la forme  $n^2$  pour  $n \geq 2$ , et nous avons également prouvé que chacun de ces nombres, pour un choix approprié de  $A$  et  $B$ , satisfait la condition demandée

$$\binom{A}{2} + \binom{B}{2} = AB. \quad \square$$

*Beweis.* Die Bedingung führt zur Gleichung

$$\binom{A}{2} + \binom{B}{2} = AB.$$

Damit gilt  $\frac{A(A-1)}{2} + \frac{B(B-1)}{2} = AB$ . Umordnen nach Potenzen von  $B$  ergibt

$$B^2 - (2A+1)B + A^2 - A = 0.$$

Aus der Lösungsformel für die allgemeine quadratische Gleichung folgt

$$B = \frac{2A+1 \pm \sqrt{(2A+1)^2 - 4(A^2 - A)}}{2} = \frac{2A+1 \pm \sqrt{8A+1}}{2}.$$

Die Lösung mit dem Pluszeichen erfüllt offenbar  $B \geq A$ , aber wir müssen die Lösung mit dem Minuszeichen verwerfen. In der Tat gilt

$$A > \frac{2A+1 - \sqrt{8A+1}}{2}$$

da diese Ungleichung äquivalent ist zu

$$\sqrt{8A+1} > 1.$$

Es sei nun  $8A+1 = v^2$  (daher  $v \geq 3$  und  $v$  ist ungerade). Dann gilt

$$A = \frac{v^2 - 1}{8} = \frac{\frac{(v+1)}{2} \frac{(v-1)}{2}}{2} = \binom{\frac{v+1}{2}}{2}$$

und

$$B = \frac{2A+1 + \sqrt{8A+1}}{2} = \frac{\frac{v^2-1}{4} + 1 + v}{2} = \frac{v^2 + 4v + 3}{8} = \frac{\frac{(v+3)}{2} \frac{(v+1)}{2}}{2} = \binom{\frac{v+3}{2}}{2}.$$

Also ist  $A = \binom{n}{2}$  und  $B = \binom{n+1}{2}$ , wobei  $n = \frac{v+1}{2} \geq 2$  ( $n$  ist eine ganze Zahl, da  $v$  ungerade ist). Es folgt

$$A + B = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2.$$

Eine einfache Berechnung zeigt, dass diese Werte von  $n$  mit den entsprechenden Werten für  $A$  und  $B$  die Bedingung erfüllen. In der Tat müssen wir nur die Teilnehmer in zwei Gruppen aufteilen, wie oben vorgeschlagen:

$$A = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad B = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dann gilt einerseits

$$AB = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4}.$$

Andererseits ist

$$\binom{B}{2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} \left( \frac{n(n+1)}{2} - 1 \right)}{2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)-2}{2}}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)(n+2)}{8}$$

und entsprechend

$$\binom{A}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)(n-2)}{8}.$$

Schließlich folgt

$$\binom{A}{2} + \binom{B}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)(2n)}{8} = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4}.$$

Wir haben also gezeigt, dass die Anzahl an Teilnehmern eine Zahl der Form  $n^2$  mit  $n \geq 2$  sein muss, und dass für jede solche Zahl die Bedingung

$$\binom{A}{2} + \binom{B}{2} = AB.$$

mit einer geeigneten Wahl von  $A$  und  $B$  erfüllt ist.

□

**Problem 7.** Let  $ABCD$  be a rectangle with  $AB > BC$  and such that  $BC = 1$ . Let  $E$  be the point different from  $B$  such that  $CE = BC$  and  $\angle AEC = 90^\circ$ . Assume that  $\angle DCE = 30^\circ$ . Find the length  $AB$ .

---

*Soit  $ABCD$  un rectangle avec  $AB > BC$  et tel que  $BC = 1$ . Soit  $E$  le point différent de  $B$  tel que  $CE = BC$  et  $\angle AEC = 90^\circ$ . Supposons que  $\angle DCE = 30^\circ$ . Trouvez la longueur  $AB$ .*

---

*Sei  $ABCD$  ein Rechteck mit  $AB > BC$  und  $BC = 1$ . Sei  $E$  der von  $B$  verschiedene Punkt, für welchen  $CE = BC$  und  $\angle AEC = 90^\circ$  gelten. Finden Sie die Länge  $AB$  unter der Annahme, dass  $\angle DCE = 30^\circ$ .*

*Proof.* The answer is  $AB = \sqrt{3}$ . Indeed,  $\angle EAC = \angle BAC$  (as can be seen since  $E$  is the reflection of  $B$  with respect to  $(AC)$ , or also since  $E, C, B, A$  are on a circle and the angle bisector of  $\angle EAB$  and the perpendicular bisector of  $[BE]$  meet in the same point  $C$  of the circle). Thus

$$\alpha := \angle EAC = \angle BAC = \angle ACD$$

and hence  $\angle DCE = 90^\circ - 2\alpha$ . If  $\angle DCE = 30^\circ$ , then  $\alpha = 30^\circ$  and

$$AB = \frac{BC}{\tan(\alpha)} = \sqrt{3}. \quad \square$$

*Preuve.* La réponse est  $AB = \sqrt{3}$ . En effet,  $\angle EAC = \angle BAC$  (comme on voit car  $E$  est la réflexion de  $B$  par rapport à  $(AC)$ , ou aussi car  $E, C, B, A$  sont sur un même cercle et la bissectrice de  $\angle EAB$  et la médiatrice de  $[BE]$  se coupent en un même point  $C$  du cercle). Donc

$$\alpha := \angle EAC = \angle BAC = \angle ACD$$

et donc  $\angle DCE = 90^\circ - 2\alpha$ . Si  $\angle DCE = 30^\circ$ , alors  $\alpha = 30^\circ$  et

$$AB = \frac{BC}{\tan(\alpha)} = \sqrt{3}. \quad \square$$

*Beweis.* Die Antwort lautet  $AB = \sqrt{3}$ . Es gilt  $\angle EAC = \angle BAC$  (da  $E$  die Spiegelung von  $B$  bezüglich  $(AC)$  ist, oder auch da  $E, C, B, A$  sich auf einem Kreis befinden und die Winkelhalbierende von  $\angle EAB$ , sowie die Mittelsenkrechte von  $[BE]$  sich im selben Punkt  $C$  des Kreises treffen). Daher gilt

$$\alpha := \angle EAC = \angle BAC = \angle ACD$$

und damit  $\angle DCE = 90^\circ - 2\alpha$ . Wenn  $\angle DCE = 30^\circ$ , dann gilt  $\alpha = 30^\circ$  und folglich

$$AB = \frac{BC}{\tan(\alpha)} = \sqrt{3}. \quad \square$$

**Problem 8.** You are trying to crack a code of 8 digits. You know that the code represents the birthday of someone who was born between the year 1 (included) and today, in the format *ddmmyyyy* (today's date is 25022023). You also have the following information:

- The day is a prime number;
- the prime decomposition of the year is given by  $p \cdot (p + 10) \cdot (2p + 3)$ , where  $p$  is a prime number;
- the person was born on a Wednesday.

What is the code?

---

*Vous essayez de débloquer un code de 8 chiffres. Vous savez que le code représente l'anniversaire de quelqu'un qui est né entre l'année 1 (inclus) et aujourd'hui, dans le format *jjmmaaaa* (la date d'aujourd'hui est 25022023). Vous avez aussi l'information suivante:*

- Le jour est un nombre premier;
- la décomposition en nombres premiers de l'année est donnée par  $p \cdot (p + 10) \cdot (2p + 3)$ , où  $p$  est un nombre premier;
- la personne est née sur un mercredi.

*Quel est le code?*

---

Sie versuchen, einen 8-stelligen Code zu knacken. Sie wissen, dass der Code den Geburtstag einer Person darstellt, die zwischen dem Jahr 1 (einschließlich) und heute geboren wurde, und zwar im Format *tmmjjjj* (das heutige Datum ist 25022023). Des Weiteren wissen Sie Folgendes:

- Der Tag im Monat ist eine Primzahl;
- die Primfaktorzerlegung des Jahres ist gegeben durch  $p \cdot (p + 10) \cdot (2p + 3)$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist;
- die Person wurde an einem Mittwoch geboren.

Wie lautet der Code?

*Proof.* The answer is 11012023. If you go through the primes in order, starting with 2, the first prime  $p$  for which  $p+10$  and  $2p+3$  are also prime, is  $p = 7$ . In this case we get  $7 \cdot 17 \cdot 17 = 2023$  as year. Larger primes result in years later than 2023 and thus can be discarded. So the day must have been in January or February 2023 (before today, the 25 February). One can count back from the date of the competition, and the only Wednesday in 2023 so far that fell on a prime day is 11 January 2023. So the code is 11012023.  $\square$

---

*Preuve.* La réponse est 11012023. En parcourant les nombres premiers dans l'ordre, commençant par 2, le premier nombre premier  $p$  pour lequel  $p+10$  et  $2p+3$  sont aussi premiers, est  $p = 7$ . Dans ce cas on trouve  $7 \cdot 17 \cdot 17 = 2023$  comme année. Des nombres premiers plus grands résultent en des années plus tard que 2023, et on peut donc les écarter. Il s'en suit que le jour doit avoir été en janvier ou février 2023 (avant aujourd'hui, le 25 février). On peut compter depuis la date de la compétition, et le seul mercredi en 2023 jusqu'à aujourd'hui qui est tombé sur une date de nombre premier est le 11 janvier 2023. Le code est donc 11012023.  $\square$

---

*Beweis.* Die Antwort lautet 11012023. Wenn Sie die Primzahlen der Reihe nach durchgehen und mit 2 beginnen, ist  $p = 7$  die erste Primzahl  $p$ , für welche  $p+10$  und  $2p+3$  ebenfalls Primzahlen sind. In diesem Fall erhalten wir das Jahr  $7 \cdot 17 \cdot 17 = 2023$ . Größere Primzahlen  $p$  ergeben Jahre nach 2023 und kommen somit nicht in Frage. Der gesuchte Tag muss also im Januar oder Februar 2023 gewesen sein (vor heute, dem 25. Februar). Der einzige bisher stattgefundene Mittwoch des Jahres 2023, dessen Tag im Monat eine Primzahl ist, ist der 11. Januar 2023. Der Code lautet also 11012023.  $\square$

**Problem 9.** *The following is an integer; find its value:*

$$2\sqrt{\frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}+1}} + \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}.$$


---

*Le suivant est un nombre entier; trouver sa valeur:*

$$2\sqrt{\frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}+1}} + \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}.$$


---

*Die folgende Zahl ist ganz; finden Sie ihren Wert:*

$$2\sqrt{\frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}+1}} + \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}.$$

*Proof.* Denote the mentioned number by  $x$ . Then

$$\begin{aligned}
 x &= 2\sqrt{\frac{(2\sqrt{5}-4)(-\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(-\sqrt{5}+1)}} + \sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^3} \\
 &= 2\sqrt{\frac{6\sqrt{5}-14}{-4}} + (\sqrt{5}-2) \\
 &= \sqrt{-6\sqrt{5}+14} + \sqrt{5}-2 \\
 &= \sqrt{(-\sqrt{5}+3)^2} + \sqrt{5}-2 \\
 &= -\sqrt{5}+3 + \sqrt{5}-2 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

*Preuve.* Soit  $x$  le nombre cherché. Alors

$$\begin{aligned}
 x &= 2\sqrt{\frac{(2\sqrt{5}-4)(-\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(-\sqrt{5}+1)}} + \sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^3} \\
 &= 2\sqrt{\frac{6\sqrt{5}-14}{-4}} + (\sqrt{5}-2) \\
 &= \sqrt{-6\sqrt{5}+14} + \sqrt{5}-2 \\
 &= \sqrt{(-\sqrt{5}+3)^2} + \sqrt{5}-2 \\
 &= -\sqrt{5}+3 + \sqrt{5}-2 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

*Beweis.* Nennen wir die erwähnte Zahl  $x$ , so gilt

$$\begin{aligned}
 x &= 2\sqrt{\frac{(2\sqrt{5}-4)(-\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(-\sqrt{5}+1)}} + \sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^3} \\
 &= 2\sqrt{\frac{6\sqrt{5}-14}{-4}} + (\sqrt{5}-2) \\
 &= \sqrt{-6\sqrt{5}+14} + \sqrt{5}-2 \\
 &= \sqrt{(-\sqrt{5}+3)^2} + \sqrt{5}-2 \\
 &= -\sqrt{5}+3 + \sqrt{5}-2 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

**Problem 10.** *Prove that the square of a non-negative integer never leaves remainder 2 or 3 on division by 4.*

---

*Prouver que la division euclidienne du carré d'un nombre entier naturel par 4 ne donne jamais pour reste 2 ou 3.*

---

*Beweise, dass das Quadrat einer natürlichen Zahl nie den Rest 2 oder 3 bei Division durch 4 hat.*

*Proof.* An even number is divisible by 2, so its square is divisible by 4 hence leaves remainder 0 on division by 4. An odd number is of the form  $n = 2t + 1$ , where  $t$  is an integer. So its square is  $n^2 = (2t + 1)^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 4(t^2 + t) + 1$ . Thus the remainder on division by 4 is 1. As the possible remainders are only 0, 1, the remainders 2, 3 are impossible.  $\square$

---

*Preuve.* Un nombre entier pair est divisible par 2, donc son carré est divisible par 4, et n'a donc jamais pour reste 0 après division euclidienne par 4. Un nombre impair est de la forme  $n = 2t + 1$ , où  $t$  est un entier. Donc son carré égale  $n^2 = (2t + 1)^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 4(t^2 + t) + 1$ . Ainsi, le reste de la division euclidienne de  $n^2$  par 4 sera égal à 1. Les restes possibles étant 0 ou 1, les restes 2 et 3 sont impossibles.  $\square$

---

*Beweis.* Eine gerade Zahl ist durch 2 teilbar, so dass ihr Quadrat durch 4 teilbar ist (d.h. der Rest ist dann 0). Eine ungerade natürliche Zahl  $n$  hat die Form  $n = 2t + 1$ , wobei  $t$  eine natürliche Zahl ist. Folglich ist das Quadrat gleich  $n^2 = (2t + 1)^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 4(t^2 + t) + 1$ , so dass der Rest nach Division durch 4 gleich 1 ist. Insgesamt ergibt sich, dass die Reste 2 und 3 nie vorkommen können.  $\square$

**Problem 11.** Let  $ABCD$  be a rectangle made of paper. Folding the piece of paper in two along some line and opening it again makes the line appear as a crease on the paper as if one had drawn it.

- (1) Fold the paper in two such that  $A$  lies on  $B$  and  $D$  lies on  $C$ .  
Call the resulting line  $L$ .
- (2) Fold the paper in two such that the segment  $BC$  lies on  $L$ .  
Call the resulting line  $L'$ .
- (3) Suppose that you can fold the paper in two such that  $A$  lies on  $L'$  and such that the resulting line, which we call  $L''$ , passes through  $D$  and through the intersection of  $AB$  and  $L$ .

What is the ratio between the largest and the smallest side of the rectangle  $ABCD$ ?

---

*Soit  $ABCD$  un rectangle de papier. En pliant la feuille en deux le long d'une ligne et en l'ouvrant à nouveau, cela fait apparaître une ligne de pliage sur le papier comme si on l'avait tracée.*

- (1) Plions le papier en deux de sorte que  $A$  repose sur  $B$  et  $D$  repose sur  $C$ .  
Appelons  $L$  la ligne qui en résulte.
- (2) Plions le papier en deux de sorte que le segment  $BC$  repose sur  $L$ .  
Appelons  $L'$  la ligne qui en résulte.
- (3) Supposons que vous puissiez plier le papier en deux de sorte que  $A$  repose sur  $L'$  et que la ligne qui en résulte, notée  $L''$ , passe par  $D$  ainsi que par l'intersection de  $AB$  et de  $L$ .

Quel est le ratio des longueurs entre le côté le plus court et celui le plus long du rectangle  $ABCD$ ?

---

*Es sei  $ABCD$  ein Rechteck aus Papier. Wenn du das Papier entlang einer Linie faltest, und es wieder öffnest, wird die Faltlinie sichtbar, so als hätte man sie auf das Papier gezeichnet.*

- (1) Falte das Papier, so dass  $A$  auf  $B$  liegt und  $D$  auf  $C$  liegt.  
Man bezeichne die dadurch entstandene Faltlinie mit  $L$ .
- (2) Falte das Papier, so dass das Segment  $BC$  auf  $L$  liegt.  
Man bezeichne die dadurch entstandene Faltlinie mit  $L'$ .
- (3) Man nehme an, dass man das Papier so falten kann, dass  $A$  auf  $L'$  liegt und so, dass die dadurch entstandene Faltlinie, welche wir mit  $L''$  bezeichnen, durch  $D$  und den Schnittpunkt von  $AB$  und  $L$  verläuft.

Welches ist das Verhältnis zwischen der längsten und kürzesten Seite des Rechtecks  $ABCD$ ?

*Proof.* Let  $|AB| = x$ ,  $|BC| = y$ . Let  $M$  be the midpoint of  $A$  and  $B$  and  $N$  the midpoint of  $M$  and  $B$ . Notice that  $L$  and  $L'$  are parallel to  $AD$  and  $BC$  and go through  $M$  and  $N$  respectively.

Let  $P$  be the point on  $L'$  such that  $|AM| = |MP|$ . We have  $\tan(\angle AMD) = \frac{y}{\frac{1}{2}x}$ . Then, as  $\cos(\angle NMP) = \frac{\frac{1}{4}x}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$ , we deduce  $\angle NMP = \frac{\pi}{3}$ .

Hence,  $\angle AMD = \frac{1}{2}\angle AMP = \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$ . This implies  $\frac{x}{y} = \frac{2}{\tan(\angle AMD)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

□

*Preuve.* Soient  $|AB| = x$ ,  $|BC| = y$ . Soit  $M$  le milieu de  $A$  et  $B$  et soit  $N$  le milieu de  $M$  et  $B$ . Notons que  $L$  et  $L'$  sont parallèles à  $AD$  et  $BC$  et qu'elles passent par  $M$  et  $N$  respectivement.

Soit  $P$  le point sur  $L'$  tel que  $|AM| = |MP|$ . On a  $\tan(\angle AMD) = \frac{y}{\frac{1}{2}x}$ . Comme  $\cos(\angle NMP) = \frac{\frac{1}{4}x}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$ , on en déduit  $\angle NMP = \frac{\pi}{3}$ .

Ainsi,  $\angle AMD = \frac{1}{2}\angle AMP = \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$ . Ceci implique que  $\frac{x}{y} = \frac{2}{\tan(\angle AMD)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

□

*Beweis.* Es sei  $|AB| = x$  und  $|BC| = y$ . Sei  $M$  der Mittelpunkt von  $AB$  und  $N$  der Mittelpunkt von  $MB$ . Beachte, dass  $L$  und  $L'$  parallel zu  $AD$  und  $BC$  sind, und durch  $M$  bzw.  $N$  verlaufen. Es sei nun  $P$  der Punkt auf  $L'$ , so dass  $|AM| = |MP|$  gilt. Dann gilt  $\tan(\angle AMD) = \frac{y}{\frac{1}{2}x}$ . Aus  $\cos(\angle NMP) = \frac{\frac{1}{4}x}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$  folgern wir  $\angle NMP = \frac{\pi}{3}$ .

Also gilt  $\angle AMD = \frac{1}{2}\angle AMP = \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$ , woraus  $\frac{x}{y} = \frac{2}{\tan(\angle AMD)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$  folgt.

□

**Problem 12.** Let  $a$  be a strictly positive real. Show that

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Let  $x, y, z$  be strictly positive reals such that:

$$\begin{cases} a = x + y - z > 0 \\ b = x - y + z > 0 \\ c = -x + y + z > 0. \end{cases}$$

Prove the following inequality:

$$x + y + z - \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz}{(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z)} \geq 6.$$


---

Soit  $a$  un nombre réel strictement positif. Montrez que

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Soient  $x, y, z$  des nombres réels positifs tels que:

$$\begin{cases} a = x + y - z > 0 \\ b = x - y + z > 0 \\ c = -x + y + z > 0. \end{cases}$$

Prouvez l'inégalité suivante :

$$x + y + z - \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz}{(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z)} \geq 6.$$


---

Es sei  $a$  eine streng positive reelle Zahl. Beweise dass

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Es seien  $x, y, z$  streng positive reelle Zahlen, so dass

$$\begin{cases} a = x + y - z > 0 \\ b = x - y + z > 0 \\ c = -x + y + z > 0. \end{cases}$$

Beweise die folgende Ungleichung:

$$x + y + z - \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz}{(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z)} \geq 6.$$

*Proof.* Observe that  $a + b + c = x + y + z$  and that

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz = -ab - ac - bc.$$

It follows

$$\begin{aligned} x + y + z &- \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz}{(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z)} \\ &= a + b + c + \frac{ab + ac + bc}{abc} \\ &= a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} \\ &\geq 2 + 2 + 2 = 6. \end{aligned}$$

□

*Preuve.* Observons que  $a + b + c = x + y + z$  et que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz = -ab - ac - bc.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} x + y + z &- \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz}{(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z)} \\ &= a + b + c + \frac{ab + ac + bc}{abc} \\ &= a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} \\ &\geq 2 + 2 + 2 = 6. \end{aligned}$$

□

*Beweis.* Es gilt  $a + b + c = x + y + z$ , sowie

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz = -ab - ac - bc.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} x + y + z &- \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz}{(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z)} \\ &= a + b + c + \frac{ab + ac + bc}{abc} \\ &= a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} \\ &\geq 2 + 2 + 2 = 6. \end{aligned}$$

□