MATH DAY 2023

ANLEITUNGEN:

Aufgaben

JUNIOR: Aufgaben 1 bis einschließlich 12.
MITTEL: Aufgaben 5 bis einschließlich 16.
SENIOR: Aufgaben 11 bis einschließlich 16, sowie drei Beweisaufgaben.
ACHTUNG Zusätzlich gelöste Aufgaben werden nicht bewertet!

Bewertung

Es handelt sich um Multiple-Choice-Fragen, welche folgendermaßen bewertet werden: 3 Punkte für die korrekte, 0 Punkte für eine falsche, und 1 Punkt für keine Antwort. Jede Frage besitzt genau eine richtige Antwort.
Nur für Senior: Die Beweisaufgaben werden mit jeweils 9 Punkten bewertet. Ausführliche Antworten sind einzureichen.

Bitte füllen Sie die unten stehenden Informationen aus, und tragen Sie Ihre Antworten zu den Multiple-Choice-Fragen in der Tabelle auf der folgenden Seite ein.

VORNAME

NACHNAME

KATEGORIE

(Junior/Mittel/Senior)

Aufgabe	Kategorie	Antwort (A,B,C,D oder E)
1	J	
2	J	
3	J	
4	J	
5	J, M	
6	J, M	
7	J, M	
8	J, M	
9	J, M	
10	J, M	
11	J, M, S	
12	J, M, S	
13	M, S	
14	M, S	
15	M, S	
16	M, S	

Aufgaben

1. Die Zwillingsbrüder Erik und Oskar müssen ihr Lieblingsspiel für ein ganzes Jahr miteinander teilen (1. Januar bis 31. Dezember). Es handelt sich nicht um ein Schaltjahr. Sie entscheiden, dass Erik das Spiel an geraden Tagen im Monat haben darf (am 2., 4., 6., ... Tag jedes Monats), und Oskar an den restlichen Tagen. Sie bemerken allerdings, dass das Jahr mehr ungerade als gerade Tage hat. Wie viele?

   A: 2

   B: 5

   C: 7

   D: 12

Antwort: C.

Lösung: Monate mit 28 und 30 Tagen haben genauso viele gerade wie ungerade Tage. Die sieben Monate mit 31 Tagen haben allerdings einen ungeraden Tag mehr. Die Antwort lautet also 7 Tage.

---

2. Herr Adams und Herr Beckam gelangen gleichzeitig an eine Tür und müssen entscheiden, wer zuerst eintritt. In regelmäßigen Abständen versuchen sie, sich zu einigen. Bei jedem Versuch können sie sprechen (mit den Worten „Sie gehen zuerst“) oder schweigen. Wenn beide gleichzeitig sprechen, tritt niemand ein. Spricht nur einer, tritt der schweigende Herr ein.
   Sprechen beide, so schweigt Herr Adams für mindestens eine Runde und Herr Beckam für mindestens zwei Runden. Wenn in mindestens drei aufeinanderfolgenden Runden niemand gesprochen hat, so spricht Herr Beckam in der nächsten Runde. Keiner der beiden kennt die Regeln des anderen, und sie einigen sich nicht auf eine Strategie. Ist es garantiert, dass es schließlich eine Runde geben wird, nach welcher einer der beiden durch die Tür tritt?

   A: Ja

   B: Nein

Antwort: B.

Lösung: Zum Beispiel könnten beide jede vierte Runde sprechen, und dazwischen (während drei Runden) schweigen.

---

3. Es werden vier Statuen eines Elfen angefertigt, welche sich nur in ihrer Größe unterscheiden. Die Größen sind XL (sehr groß), L (groß), M (mittel) und S (klein). Die Statuen haben unterschiedliche Gewichte, die in der oben angegebenen Reihenfolge abnehmen, d.h. die größte Statue ist die schwerste, die zweitgrößte die zweitschwerste usw. Ihre Freundin hat die Statuen paarweise gewogen; die Gewichte der verschiedenen Paare in Gramm sind

$$18, 24, 30, 30, 36, 42\,.$$

Wie lautet das Gesamtgewicht der vier Statuen in Gramm?

A: 60

B: 120

C: 150

D: 180

Antwort: A.

Lösung: Man kann die angegebenen Gewichte summieren und durch 3 teilen, oder das kleinste Gewicht (XS + S) zum größten Gewicht (XL + L) addieren. Man hätte auch die beiden mittleren Gewichte addieren können, da diese XL + S und L + M entsprechen (dass beide Gewichte hier gleich sind, ist nur ein Zufall, jedes der beiden hätte größer sein können). Eine andere Möglichkeit wäre, das zweitgrößte Gewicht (XL + M) und das zweitkleinste Gewicht (L + S) zu addieren. In jedem Fall lautet die Antwort 60.

---

4. Ein Kind spielt mit einem ferngesteuerten Auto. Das Auto kann nur in Winkeln von 90° nach links oder rechts abbiegen. Außerdem dreht es sich nach jedem gefahrenen Meter genau ein Mal; das Kind kann lediglich entscheiden, ob es sich um eine Links- oder eine Rechtskurve handeln soll. Es wird auf einem 3 Meter $\times$ 4 Meter großen rechteckigen Teppich gespielt. Ausgehend von einer Teppichecke parallel zu einer Teppichseite, wie viele weitere Teppichecken können mit dem Auto erreicht werden?

A: 1

B: 2

C: 3

Antwort: C.

Lösung: Die Antwort lautet 3, da das Auto alle weiteren Ecken erreichen kann. Aufgrund der Symmetrie spielt es keine Rolle, an welcher Ecke begonnen wird. Arbeiten wir mit einem Koordinatensystem in welchem $(0,0)$ den Startpunkt beschreibt mit gegenüberliegender Ecke $(4,3)$, so könnte man zum Beispiel folgendermaßen zu den restlichen Ecken gelangen:

$$(0,0),(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3),(4,3)$$

$$(0,0),(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,2),(3,1),(4,1),(4,0)$$

$$(0,0),(1,0),(1,1),(0,1),(0,2),(1,2),(1,3),(0,3)$$

---

5. Es gibt eine Welt, die der unseren ähnelt, aber in welcher die Menschen entweder Lügner oder Wahrsager sind. Lügner lügen immer und Wahrsager sagen immer die Wahrheit. Ein Kind behauptet: „Jeder in meiner Familie ist ein Lügner“. Diese Behauptung ist:

   A: Wahr

   B: Falsch

   C: Weder wahr noch falsch

Antwort: B.

Lösung: Die Behauptung kann nicht wahr sein, andernfalls wäre das Kind selbst ein Lügner (als Teil der eigenen Familie), welcher die Wahrheit sagt. Die Behauptung kann falsch sein, zum Beispiel wenn nur die Hälfte der Familienmitglieder Lügner sind.

---

6. Sie bereiten eine Yogastunde vor, bei der die Teilnehmer auf in einer Reihe angeordneten Stühlen sitzen. Die Stühle stehen nebeneinander ohne Zwischenraum. Damit die Teilnehmer ihre Arme seitwärts ausstrecken können, ohne sich gegenseitig zu berühren, sollen zwischen zwei besetzten Plätzen immer zwei freie Plätze bestehen. Nachdem Sie die Stuhlreihe aufgebaut und damit die gesamte verfügbare Breite eingenommen haben, entscheiden Sie sich, zwei seitliche Stühle zu entfernen. Dies verringert die Anzahl der für die Teilnehmer verfügbaren Sitzplätze nicht. Welcher Rest entsteht, wenn Sie die Anzahl der Stühle in der Reihe nach Entfernen der beiden Stühle durch 3 teilen?

   A: 0

B: 1

C: 2

Antwort: B.

Lösung: Optimal ist es, die Stuhlreihe mit einem besetzten Sitzplatz zu beginnen. Das Hinzufügen von zwei Stühlen macht genau dann keinen Unterschied, wenn der letzte Stuhl auch besetzt ist. Dies bedeutet, dass der Rest nach Division durch 3 gleich 1 ist.

---

7. Sie dürfen einer Urne N Kugeln entnehmen, welche viele Kugeln der Farben blau, grün, gelb und rot enthält. Sie gewinnen, sobald Sie 1 blaue Kugel, 2 grüne Kugeln, 3 gelbe Kugeln oder 4 rote Kugeln entnommen haben. Was ist der kleinste Wert für N, für den Sie garantiert gewinnen?

   A: 4

   B: 5

   C: 6

   D: 7

Antwort: D.

Lösung: Sie verlieren, wenn Sie 1 grüne Kugel, 2 gelbe Kugeln und 3 rote Kugeln ziehen. Sobald Sie eine weitere Kugel ziehen, gewinnen Sie garantiert. Folglich gilt $N = 7$.

---

8. In einem Laden werden dreieckige Fliesen verkauft. Die Seitenlängen jeder dieser Fliesen betragen 8, 12 und 18 Zentimeter. Ihnen gefällt die Form, aber Sie benötigen größere Fliesen. Das Dreieck, das Sie wünschen, ähnelt dem im Laden erhältlichen, und hat erneut ganzzahlige Seitenlängen in Zentimetern. Zwei der Seitenlängen betragen 12 und 18 Zentimeter. Wie groß ist die dritte Seitenlänge in Zentimetern?

   A: 24

   B: 27

   C: 30

   D: 36

Antwort: B.

Lösung: Nennen wir X die fehlende Seitenlänge, so gilt $8/12 = 12/18 = 18/X$, und deshalb $X = 27$.

---

9. Alice benötigt 4 Stunden, um einen Zaun zu streichen, während Bob 12 Stunden für dieselbe Arbeit braucht. Wie viele Stunden dauert es, wenn beide den Zaun gemeinsam streichen?

   A: 1

   B: 2

   C: 3

   D: 4

Antwort: C.

Lösung: Wenn Alice und Bob X Stunden arbeiten, so ist $\frac{1}{4}X + \frac{1}{12}X$ der Anteil der gesamten Arbeit, den sie erledigen. Die Arbeit ist abgeschlossen, wenn dieser Bruch gleich 1 ist, das heißt, wenn $X = 3$.

---

10. Sie organisieren einen Filmetag in Ihrer Schule. Sie wissen, dass 50% der Schüler „Außerirdische und Alligatoren" (Film A) und 40% der Schüler „Basketball und Brötchen" (Film B) sehen. Sie wissen außerdem, dass 20% der Schüler, die sich Film A ansehen, sich auch Film B ansehen. Wie viel Prozent der Schüler, die Film B sehen, schauen auch Film A?

    A: 5%

    B: 10%

    C: 25%

    D: 50%

Antwort: C.

Lösung: Nehmen wir (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) an, dass die Schule insgesamt 100 Schüler fasst. Dann sehen sich 10 Schüler beide Filme A und B an, was 25% der Schüler entspricht, welche sich Film B ansehen.

---

11. In Ihrem Lieblingsrestaurant können Sie Tofu-Nuggets zum Mitnehmen bestellen. Sie werden in Packungen von 3, 5 und 7 verkauft. Somit ist es beispielsweise nicht möglich, genau 2 Tofu-Nuggets zu bestellen. Wie viele ganze Zahlen $n \geq 1$ gibt es, für welche man nicht genau n Nuggets bestellen kann?

A: 1

B: 2

C: 3

D: 4

E: 5

Antwort: C.

Lösung: Ist die Anzahl der Nuggets ein Vielfaches von 3, dann können Sie einige 3er-Packungen bestellen. Ist die Anzahl ein Vielfaches von 3 plus 2 (mindestens 5), so können Sie eine 5er-Packung und einige 3er-Packungen bestellen. Ist die Anzahl ein Vielfaches von 3 plus 1 (mindestens 7), dann können Sie eine 7er-Packung und einige 3er-Packungen bestellen. Die einzigen Mengen an Nuggets, die Sie nicht bestellen können, sind also 1, 2 und 4.

---

12. Ihre Klasse bereitet sich auf einen Ausflug vor und Ihre Lehrer füllen Lunchpakete mit belegten Broten. Für jeden Schüler ist ein Lunchpaket vorgesehen. Die Lunchpakete und die belegten Brote sind allesamt gleich. Jedes belegte Brot kann in 2 oder 3 gleiche Teile geschnitten werden. Sie wissen, dass 14 belegte Brote ausreichen, um 9 Lunchpakete zu füllen, aber nicht 10. Wie viele belegte Brote werden mindestens benötigt, um die Lunchpakete für die 24 Schüler zuzubereiten?

A: 24

B: 30

C: 32

D: 36

E: 48

Antwort: D.

Lösung: Die Menge an belegten Broten in jedem Lunchpaket ist ein Bruch der Form $X/6$. Aus den Informationen über die 14 belegten Brote wissen wir, dass $14/10 \leq X/6 \leq 14/9$. Daraus folgern wir, dass $8 < X < 10$, heißt $X = 9$ gilt. Jedes Lunchpaket enthält also $9/6 = 3/2$ belegte Brote. Für 24 Lunchpakete werden also $24 \cdot 3/2 = 36$ belegte Brote benötigt.

---

13. In einem Säckchen befinden sich rote, gelbe und grüne Kugeln. Wir nehmen zwei Kugeln hintereinander aus dem Säckchen, ohne die erste zurückzulegen. Die Wahrscheinlichkeit, zwei rote Kugeln zu entnehmen, beträgt $\frac{1}{7}$ und die Wahrscheinlichkeit, zwei gelbe Kugeln zu entnehmen, beträgt $\frac{1}{5}$. Was ist der kleinstmögliche Wert an Kugeln im Säckchen, um dies zu ermöglichen?

    A: 15

    B: 35

    C: 70

Antwort: A.

Lösung: Nenne die gesuchte Zahl n. Seien r und g die Anzahl an roten bzw. gelben Kugeln. Wir wissen, dass

$$\frac{r(r-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{7}, \qquad \frac{g(g-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{5},$$

woraus $7r(r-1) = n(n-1) = 5g(g-1)$ folgt. Dies zeigt, dass $n(n-1)$ durch 5 und 7 teilbar ist, und deshalb auch durch 35. Das kleinste $n \geq 1$, welches dies erfüllt, ist $n = 15$. Um zu sehen, dass $n = 15$ sich in der Tat eignet, sei zu beachten, dass $r = 6$ und $g = 7$ zu den gewünschten Wahrscheinlichkeiten führen.

---

14. Die neuen luxemburgischen Autokennzeichen bestehen aus zwei Buchstaben, gefolgt von einer 4-stelligen Zahl. Da sich der Buchstabe O und die Ziffer 0 auf Autokennzeichen zu sehr ähneln, muss eines der beiden Zeichen verboten werden. Welches der beiden sollten wir verbieten, um die größtmögliche Anzahl an erlaubten Autokennzeichen zu erhalten? (Das betrachtete Alphabet besteht aus 26 Buchstaben.)

    A: Den Buchstaben O.

    B: Die Ziffer 0.

    C: Die Wahl spielt keine Rolle.

Antwort: A.

Lösung: Verbieten wir den Buchstaben O, so erhalten wir $25^2 \cdot 10^4$ erlaubte Kennzeichen. Das Verbot der Ziffer 0 führt zu $26^2 \cdot 9^4$ erlaubten Kennzeichen. Da $25 \cdot 10^2 > 26 \cdot 9^2$, lautet die Antwort A.

---

15. Wie viele ganze Zahlen $n \geq 1$ gibt es, für welche $16n^2 + 25$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist?

    A: 0

    B: 1

    C: 2

    D: 5

Antwort: B.

Lösung: Es gilt $(4n)^2 < 16n^2 + 25 < (4n+5)^2$, daher muss ein perfektes Quadrat der Form $16n^2 + 25$ gleichzeitig die Form $(4n+1)^2$, $(4n+2)^2$, $(4n+3)^2$ oder $(4n+4)^2$ haben. Da $16n^2 + 25$ ungerade ist, können wir $(4n+2)^2$ und $(4n+4)^2$ ausschließen. Setzen wir $16n^2 + 25 = (4n+1)^2$, so erhalten wir $n = 3$. Setzen wir $16n^2 + 25 = (4n+3)^2$, so erhalten wir $n = \frac{2}{3}$, was keine ganze Zahl ist. Daher wird nur die Zahl $n = 3$ gezählt.

Alternativlösung: Sei $16n^2 + 25 = x^2$, wobei x eine positive ganze Zahl ist. Dann ist $25 = x^2 - 16n^2 = (x+4n)(x-4n)$. Da $25 = 5^2$ das Quadrat einer Primzahl ist, ist die einzig mögliche Lösung gegeben durch die Gleichungen $x + 4n = 25$ und $x - 4n = 1$. Wir folgern daraus, dass $n = 3$ und $x = 13$.

---

16. Es gibt fünf kleine Statuen eines Elfen, welche sich in ihrer Größe unterscheiden. Sie kennen ihr Gesamtgewicht W. Die verschiedenen Größen sind XL (sehr groß), L (groß), M (mittel), S (klein) und XS (sehr klein). Die Statuen haben unterschiedliche Gewichte, die in der angegebenen Reihenfolge abnehmen. Ihr Freund hat die Statuen paarweise gewogen; die Gewichte der verschiedenen Paare in abnehmender Reihenfolge sind

$$W_1, W_2, \ldots, W_{10}\,.$$

Wenn Sie nur $W_2 + W_{10}$ kennen, das Gewicht welcher Statue können Sie dann ermitteln?

    A: XL

    B: L

    C: M

    D: S

    E: XS

Antwort: B.

Lösung: Wir beschreiben das Gewicht einer Statue durch ihre Größe, zum Beispiel sei XL das Gewicht der größten und schwersten Statue. Offensichtlich gilt $W_1 = XL + L$, und da die bekannten Gewichte die Summe der Gewichte von zwei verschiedenen Statuen sind, folgt deshalb $W_2 = XL + M$. Außerdem gilt $W_{10} = S + XS$. Es folgen $W_2 + W_{10} = XL + M + S + XS$ und $L = W - (W_2 + W_{10})$. Deshalb kann das Gewicht von L berechnet werden.

Beweisaufgaben, nur für SENIOR

Problem 1. *Sei $ABCD$ ein Rechteck mit $AB > BC$ und $BC = 1$. Sei E der von B verschiedene Punkt, für welchen $CE = BC$ und $\angle AEC = 90°$ gelten. Finden Sie die Länge AB unter der Annahme, dass $\angle DCE = 30°$.*

Antwort: $AB = \sqrt{3}$.

Beweis. Es gilt $\angle EAC = \angle BAC$ (da E die Spiegelung von B bezüglich (AC) ist, oder auch da E, C, B, A sich auf einem Kreis befinden und die Winkelhalbierende von $\angle EAB$, sowie die Mittelsenkrechte von $[BE]$ sich im selben Punkt C des Kreises treffen). Daher gilt

$$\alpha := \angle EAC = \angle BAC = \angle ACD$$

und damit $\angle DCE = 90° - 2\alpha$. Wenn $\angle DCE = 30°$, dann gilt $\alpha = 30°$ und folglich

$$AB = \frac{BC}{\tan(\alpha)} = \sqrt{3}.$$ □

Problem 2. *Sie versuchen, einen 8-stelligen Code zu knacken. Sie wissen, dass der Code den Geburtstag einer Person darstellt, die zwischen dem Jahr 1 (einschließlich) und heute geboren wurde, und zwar im Format ttmmjjjj (das heutige Datum wäre zum Beispiel 25022023). Des Weiteren wissen Sie Folgendes:*

- *Der Tag im Monat ist eine Primzahl;*
- *die Primfaktorzerlegung des Jahres ist gegeben durch $p \cdot (p + 10) \cdot (2p + 3)$, wobei p eine Primzahl ist;*
- *die Person wurde an einem Mittwoch geboren.*

Wie lautet der Code?

Antwort: *11012023.*

Beweis. Wenn Sie die Primzahlen der Reihe nach durchgehen und mit 2 beginnen, ist $p = 7$ die erste Primzahl p, für welche $p + 10$ und $2p + 3$ ebenfalls Primzahlen sind. In diesem Fall erhalten wir das Jahr $7 \cdot 17 \cdot 17 = 2023$. Größere Primzahlen p ergeben Jahre nach 2023 und kommen somit nicht in Frage. Der gesuchte Tag muss also im Januar oder Februar 2023 gewesen sein (vor heute, dem 25. Februar). Der einzige bisher stattgefundene Mittwoch des Jahres 2023, dessen Tag im Monat eine Primzahl ist, ist der 11. Januar 2023. Der Code lautet also 11012023. □

Problem 3. *Die folgende Zahl ist ganz; finden Sie ihren Wert:*

$$2\sqrt{\frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}+1}}+\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}.$$

Antwort: 1.

Beweis. Nennen wir die erwähnte Zahl x, so gilt

$$\begin{aligned}
x &= 2\sqrt{\frac{(2\sqrt{5}-4)(-\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(-\sqrt{5}+1)}}+\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^3}\\
&= 2\sqrt{\frac{6\sqrt{5}-14}{-4}}+(\sqrt{5}-2)\\
&= \sqrt{-6\sqrt{5}+14}+\sqrt{5}-2\\
&= \sqrt{(-\sqrt{5}+3)^2}+\sqrt{5}-2\\
&= -\sqrt{5}+3+\sqrt{5}-2\\
&= 1.
\end{aligned}$$

□