MATH DAY 2023

INSTRUCTIONS :

Exercices

JUNIOR : Exercices 1 jusqu'à 12 inclus.
INTERMEDIAIRE : Exercices 5 jusqu'à 16 inclus.
SENIOR : Exercices 11 jusqu'à 16 inclus et les trois exercices exigeant une preuve.
ATTENTION Exercices au-delà de ceux qui vous sont demandés ne seront pas comptés !

Répartition des points

Les exercices à choix multiples ont une répartition des points comme suit : 3 points pour la réponse correcte, 0 points pour une réponse fausse, 1 point si vous ne choisissez aucune réponse. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.
Juste pour Senior : Les exercices de preuve seront notés sur 9 points chacun. Des solutions écrites doivent être fournies.

Veuillez remplir les informations ci-dessous. Veuillez écrire vos réponses aux questions à choix multiples dans le tableau sur la prochaine page.

PRÉNOM

NOM

CATÉGORIE

(Junior/Intermédiaire/Senior)

Exercice	Catégorie	Réponse (A,B,C,D, ou E)
1	J	
2	J	
3	J	
4	J	
5	J, I	
6	J, I	
7	J, I	
8	J, I	
9	J, I	
10	J, I	
11	J, I, S	
12	J, I, S	
13	I, S	
14	I, S	
15	I, S	
16	I, S	

Exercices

1. Les jumeaux Erik et Oskar doivent partager leur jeu favori pendant un an (du 1er janvier au 31 décembre). L'année n'est pas une année bissextile. Ils décident qu'Erik va avoir le jeu les jours du mois qui ont un nombre pair (donc le 2e de chaque mois, le 4e de chaque mois et ainsi de suite) et Oskar les jours qui ont un nombre impair. Cependant, ils réalisent qu'il y a plus de jours impairs que de jours pairs. En fait, combien en plus ?

   A : 2

   B : 5

   C : 7

   D : 12

Réponse : C.

Solution : Les mois avec 28 ou 30 jours ont le même nombre de jours pairs et impairs. Les sept mois avec 31 jours ont chacun un jour impair en plus. Donc la réponse est 7.

---

2. Deux messieurs, M. Adams et M. Beckam, arrivent à une porte au même moment et doivent se mettre d'accord qui va entrer en premier. À intervalles réguliers, ils tentent de trouver un accord. À chaque tentative, ils peuvent parler (en disant « Tu vas en premier ») ou rester silencieux. S'ils parlent tous deux, personne n'entre. Si personne ne parle, personne n'entre. Si juste un des deux parle, celui qui est resté silencieux entre.
   S'ils parlent en même temps, M. Adams va rester silencieux pour au moins un tour, et M. Beckam pour au moins deux tours. Si personne n'a parlé pendant au moins 3 tours consécutifs, alors M. Beckam va parler au prochain tour. Aucun des deux messieurs ne connaît les règles de l'autre et ils ne s'accordent pas sur une stratégie. Doit-il y avoir, à un certain moment, un tour où un des deux messieurs entre par la porte ?

   A : Oui

   B : Non

Réponse : B.

Solution : Par exemple, il est possible qu'ils parlent tous deux chaque quatrième tour et restent silencieux entre ces tours (donc silencieux pendant trois tours).

---

3. Il y a quatre statues d'un elfe qui diffèrent seulement par leurs tailles. Les tailles sont XL (extra large), L (large), M (médium), S (petit) respectivement. Ils ont des poids différents qui décroissent dans cet ordre, c'est-à-dire la statue la plus large est la plus lourde, la deuxième plus grande est la deuxième plus lourde et ainsi de suite. Votre ami a pesé les statues en paires, et les poids des différentes paires, en grammes, sont

$$18, 24, 30, 30, 36, 42\,.$$

Quel est le poids total des quatre statues, en grammes ?

A : 60
B : 120
C : 150
D : 180

Réponse : A.

Solution : On fait la somme des poids et divise par 3, ou on somme le poids le plus petit (donc les deux statues les plus légères) et le poids le plus élevé (donc les deux statues les plus lourdes). On aurait aussi pu sommer les deux poids intermédiaires, qui doivent être XL + S et L + M (c'est une coïncidence que ces deux poids sont les mêmes, l'un des deux pourrait être plus grand). On aurait aussi pu sommer le deuxième poids (XL + M) et l'avant-dernier poids (L + S). Dans tous les cas, la réponse est 60.

---

4. Un enfant joue avec une voiture qui peut être manœuvrée à distance. La voiture peut tourner à droite et à gauche, mais juste à des angles de 90°. En plus, elle tourne exactement une fois après chaque mètre parcouru, et l'enfant peut juste choisir si ce sera un virage à gauche ou à droite. L'enfant joue sur un tapis rectangulaire de 3 mètres × 4 mètres. En partant d'un coin du tapis, en parallèle à un des côtés du tapis, combien d'autres coins peuvent être atteints ?

A : 1
B : 2
C : 3

Réponse : C.

Solution : La réponse est 3 car la voiture peut atteindre chaque autre coin. Par symétrie, on peut commencer dans n'importe quel coin. En coordonnées, soient $(0, 0)$ le coin de départ et $(4, 3)$ le coin opposé. Voici quelques trajets possibles allant aux trois autres coins :

$$(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (4, 3)$$

$$(0,0),(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,2),(3,1),(4,1),(4,0)$$

$$(0,0),(1,0),(1,1),(0,1),(0,2),(1,2),(1,3),(0,3)$$

---

5. Il y a un monde semblable au nôtre, mais où tous les gens sont soit des menteurs, soit des diseurs de vérité. Les menteurs mentent toujours et les diseurs de vérité disent toujours la vérité. Un enfant dit : « Tout le monde dans ma famille est un menteur. » Est-ce que cette assertion est :

   A : Vraie
   B : Fausse
   C : Forcément ni vraie ni fausse

Réponse : B.

Solution : L'assertion ne peut pas être vraie, car si elle était vraie, l'enfant serait un menteur (comme il/elle fait partie de la famille) disant la vérité. L'assertion peut être fausse, par exemple si juste la moitié de la famille consiste de menteurs.

---

6. Vous préparez une session de yoga, où les participants seront assis sur des chaises disposées en une rangée. Les chaises se trouvent l'une à côté de l'autre, sans espace entre deux chaises. Les participants, cependant, doivent être capables d'allonger leurs bras à gauche et à droite sans se toucher, donc entre chaque paire de chaises occupées, il faut y avoir deux chaises vides. Après avoir installé toutes les chaises en utilisant tout l'espace disponible, vous décidez d'enlever deux chaises d'un des deux côtés, parce que le nombre de chaises disponibles aux participants n'en diminuera pas. Quel est le reste, après division par 3, du nombre de chaises dans la rangée, après avoir enlevé les deux chaises ?

   A : 0
   B : 1
   C : 2

Réponse : B.

Solution : Il est optimal de commencer la rangée par une chaise occupée. Ajouter deux chaises ne fait aucune différence si et seulement si la dernière chaise de la rangée est aussi occupée, ce qui veut dire que le reste de la division par 3 est 1.

---

7. On vous laisse tirer N boules d'une urne qui contient un grand nombre de boules de chacune des couleurs suivantes : bleu, vert, jaune, rouge. Vous gagnez dès que vous tirez 1 boule bleue, ou 2 boules vertes, ou 3 boules jaunes, ou 4 boules rouges. Quelle est la valeur minimale de N pour laquelle vous êtes sûr(e) de gagner ?

   A : 4

   B : 5

   C : 6

   D : 7

Réponse : D.

Solution : Si vous tirez 1 boule verte, 2 boules jaunes et 3 boules rouges, vous perdez (c'est la situation la moins favorable). Dès que vous tirez une boule additionnelle, vous avez forcément gagné. Donc $N = 7$.

---

8. Dans un magasin, on vend un type de carrelage en forme triangulaire, et les côtés de chaque pièce mesurent 8, 12 et 18 centimètres. La forme vous plaît, mais vous avez besoin d'une pièce plus large. Le triangle que vous aimeriez avoir est semblable à ceux vendu au magasin et les côtés, en centimètres, sont à nouveau des entiers. En plus, deux de ses côtés mesurent 12 et 18 centimètres. Quelle est la longueur du troisième côté, en centimètres ?

   A : 24

   B : 27

   C : 30

   D : 36

Réponse : B.

Solution : Appelons X la longueur du côté inconnu. On doit avoir $8/12 = 12/18 = 18/X$, et donc $X = 27$.

---

9. Alice a besoin de 4 heures pour peindre une clôture, tandis que Bob a besoin de 12 heures pour le même travail. Combien d'heures cela prendra-t-il si les deux travaillent ensemble sur la tâche ?

   A : 1

   B : 2

   C : 3

D : 4

Réponse : C.

Solution : Si Alice et Bob travaillent pendant X heures, alors la fraction du travail total qu'ils on fait est de $\frac{1}{4}X + \frac{1}{12}X$. La tâche sera complétée si cette fraction vaut 1, donc si $X = 3$.

---

10. Vous organisez une journée cinéma à votre école. Vous savez que 50% des élèves ont vu « Les alligators à l'attaque » (film A), et que 40% des élèves ont vu « Basket et biscuits » (film B). Vous savez que 20% des élèves qui ont vu le film A ont aussi vu le film B. Quel pourcentage des élèves qui ont vu film B ont aussi vu film A ?

A : 5%

B : 10%

C : 25%

D : 50%

Réponse : C.

Solution : Disons (sans perte de généralité) que nous avons 100 élèves au total. Alors 10 élèves regardent aussi bien le film A que le film B, ce qui correspond à 25% des élèves qui ont vu le film B.

---

11. Dans votre restaurant favori, vous avez la possibilité d'acheter des nuggets de tofu à emporter. Les nuggets sont vendus en paquets de 3, 5, ou 7. Il est donc impossible de commander par exemple précisément 2 nuggets de tofu. Combien d'entiers $n \geq 1$ existent-ils pour lesquels il est impossible d'acheter précisément n nuggets ?

A : 1

B : 2

C : 3

D : 4

E : 5

Réponse : C.

Solution : Si le nombre de nuggets est un multiple de 3, on peut acheter plusieurs paquets de 3. Si c'est un multiple de 3 plus 2 (au moins 5), on peut acheter un paquet de 5 et, peut-être, plusieurs paquets de 3. Si c'est un multiple de 3 plus 1 (au moins 7), alors on peut acheter un paquet de 7 et, peut-être, plusieurs paquets de 3. Donc les seules quantités de nuggets qu'on ne peut pas acheter sont 1, 2, et 4.

---

12. Votre classe fera une excursion et vos professeurs sont en train de remplir des sacs à déjeuner avec des sandwichs, un sac par élève. Les sacs à déjeuner et les sandwichs sont tous identiques. Chaque sandwich peut être coupé en 2 ou 3 parties égales. Vous savez qu'avec 14 sandwichs, on peut remplir 9 sacs mais pas 10 sacs. Combien de sandwichs ont été utilisés pour préparer des sacs à déjeuner pour les 24 élèves ?

    A : 24
    B : 30
    C : 32
    D : 36
    E : 48

Réponse : D.

Solution : La quantité de sandwich par sac est en particulier un nombre rationnel de la forme $X/6$. À partir de l'information sur les 14 sandwichs, on sait que $14/10 \leq X/6 \leq 14/9$. On en déduit que $8 < X < 10$, et donc $X = 9$. Donc chaque sac contient $9/6 = 3/2$ sandwichs, donc pour 24 sacs on a besoin de $24 \cdot 3/2 = 36$ sandwichs.

---

13. Dans un sac il y a des boules, et chaque boule est soit rouge, soit jaune, soit verte. Nous en tirons deux boules, sans remettre la première. La probabilité de tirer deux boules rouges est $\frac{1}{7}$ et celle de tirer deux boules jaunes est $\frac{1}{5}$. Quel est le nombre minimal de boules dans le sac pour que cette situation soit possible ?

    A : 15
    B : 35
    C : 70

Réponse : A.

Solution : Soit n le nombre qu'on cherche. Soient r et j les nombres de boules rouges et jaunes respectivement. On nous dit que

$$\frac{r(r-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{7}, \qquad \frac{j(j-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{5},$$

donc $7r(r-1) = n(n-1) = 5j(j-1)$. Ceci montre que $n(n-1)$ est divisible par 5 et 7, donc par 35. Le nombre minimal $n \geq 1$ qui vérifie ceci est $n = 15$. Pour voir que $n = 15$ est en fait possible, noter que $r = 6$ et $j = 7$ donnent les probabilités désirées.

---

14. Les nouvelles plaques d'immatriculation luxembourgeoises consistent de deux lettres suivies par un nombre à 4 chiffres. Comme la lettre O et le chiffre 0 se ressemblent trop sur les plaques, un des deux symboles doit être interdit. Quel symbole faut-il interdire pour obtenir le nombre maximal de plaques possibles ? (L'alphabet considéré contient 26 lettres.)

    A : La lettre O.

    B : Le chiffre 0.

    C : Le choix ne fait aucune différence.

Réponse : A.

Solution : Si on interdit la lettre O, il reste $25^2 \cdot 10^4$ plaques possibles, mais interdire le chiffre 0 n'en laisse que $26^2 \cdot 9^4$. On peut conclure car $25 \cdot 10^2 > 26 \cdot 9^2$.

---

15. Combien d'entiers $n \geq 1$ existent-ils pour lesquels $16n^2 + 25$ est le carré d'un nombre naturel ?

    A : 0

    B : 1

    C : 2

    D : 5

Réponse : B.

Solution : On a que $(4n)^2 < 16n^2 + 25 < (4n+5)^2$, donc un carré parfait de la forme $16n^2+25$ doit être parmi $(4n+1)^2$, $(4n+2)^2$, $(4n+3)^2$ et $(4n+4)^2$. Comme $16n^2+25$ est impair, ce ne peut pas être ni $(4n+2)^2$ ni $(4n+4)^2$. Prenant $16n^2 + 25 = (4n+1)^2$ nous donne $n = 3$. Prenant $16n^2 + 25 = (4n+3)^2$ donne $n = \frac{2}{3}$, ce qui n'est pas un entier. Donc la valeur $n = 3$ est la seule valeur possible.

Solution alternative : Supposons que $16n^2 + 25 = x^2$, où x est un entier positif. Alors $25 = x^2 - 16n^2 = (x + 4n)(x - 4n)$, et comme $25 = 5^2$ est le carré d'un nombre premier, la seule possibilité est donnée par les équations $x + 4n = 25$ et $x - 4n = 1$, et on conclut que $n = 3$ et $x = 13$.

---

16. Il y a cinq petites statues d'un elfe, et vous connaissez leur poids combiné W. Les statues ont des tailles différentes, elles sont XL (extra large), L (large), M (médium), S (petit), XS (extra petit), et leurs poids décroissent dans cet ordre. Votre ami a pesé les statues en paires et a écrit la liste suivante des valeurs :

$$W_1, W_2, \ldots, W_{10},$$

du plus grand au plus petit. Connaissant juste $W_2 + W_{10}$, quelle est la statue dont vous pouvez trouver le poids ?

A : XL

B : L

C : M

D : S

E : XS

Réponse : B.

Solution : Donnons le même nom au poids d'une statue et à sa taille, donc par exemple XL est le poids de la statue la plus grande et la plus lourde. C'est clair que $W_1 = XL + L$, et, comme les deux poids qu'on somme doivent être distincts, on a $W_2 = XL+M$. Similairement, on a que $W_{10} = S+XS$. Donc $W_2+W_{10} = XL+M+S+XS$. Considérant que $L = W-(W_2+W_{10})$, on trouve le poids de L.

Exercices de preuve, juste pour SENIOR

Problème 1. *Soit $ABCD$ un rectangle avec $AB > BC$ et tel que $BC = 1$. Soit E le point différent de B tel que $CE = BC$ et $\angle AEC = 90°$. Supposons que $\angle DCE = 30°$. Trouvez la longueur AB.*

Réponse : $AB = \sqrt{3}$.

Démonstration. En effet, $\angle EAC = \angle BAC$ (comme on voit car E est la réflexion de B par rapport à (AC), ou aussi car E, C, B, A sont sur un même cercle et la bissectrice de $\angle EAB$ et la médiatrice de $[BE]$ se coupent en un même point C du cercle). Donc

$$\alpha := \angle EAC = \angle BAC = \angle ACD$$

et donc $\angle DCE = 90° - 2\alpha$. Si $\angle DCE = 30°$, alors $\alpha = 30°$ et

$$AB = \frac{BC}{\tan(\alpha)} = \sqrt{3}.$$

□

Problème 2. *Vous essayez de déplomber un code de 8 chiffres. Vous savez que le code représente l'anniversaire de quelqu'un qui est né entre l'année 1 (inclus) et aujourd'hui, dans le format jjmmaaaa (par exemple, la date d'aujourd'hui serait 25022023). Vous avez aussi l'information suivante :*

- *Le jour est un nombre premier ;*
- *la décomposition en nombres premiers de l'année est donnée par $p \cdot (p + 10) \cdot (2p + 3)$, où p est un nombre premier ;*
- *la personne est née sur un mercredi.*

Quel est le code ?

Réponse : 11012023.

Démonstration. En parcourant les nombres premiers dans l'ordre, commençant par 2, le premier nombre premier p pour lequel $p + 10$ et $2p + 3$ sont aussi premiers, est $p = 7$. Dans ce cas on trouve $7 \cdot 17 \cdot 17 = 2023$ comme année. Des nombres premiers plus grands résultent en des années plus tard que 2023, et on peut donc les écarter. Il s'en suit que le jour doit avoir été en janvier ou février 2023 (« avant aujourd'hui, le 25 février »). On peut compter depuis la date de la compétition, et le seul mercredi en 2023 jusqu'aujourd'hui qui est tombé sur une date de nombre premier est le 11 janvier 2023. Le code est donc 11012023. □

Problème 3. *Le suivant est un nombre entier ; trouver sa valeur :*

$$2\sqrt{\frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}+1}} + \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}.$$

Réponse : 1.

Démonstration. Soit x le nombre cherché. Alors

$$\begin{aligned}
x &= 2\sqrt{\frac{(2\sqrt{5}-4)(-\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(-\sqrt{5}+1)}} + \sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^3} \\
&= 2\sqrt{\frac{6\sqrt{5}-14}{-4}} + (\sqrt{5}-2) \\
&= \sqrt{-6\sqrt{5}+14} + \sqrt{5}-2 \\
&= \sqrt{(-\sqrt{5}+3)^2} + \sqrt{5}-2 \\
&= -\sqrt{5}+3+\sqrt{5}-2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□