

MATH DAY 2023

INSTRUCTIONS :

Exercices

JUNIOR : Exercices 1 jusqu'à 12 inclus.

INTERMEDIAIRE : Exercices 5 jusqu'à 16 inclus.

SENIOR : Exercices 11 jusqu'à 16 inclus et les trois exercices exigeant une preuve.

ATTENTION Exercices au-delà de ceux qui vous sont demandés ne seront pas comptés!

Répartition des points

Les exercices à choix multiples ont une répartition des points comme suit : 3 points pour la réponse correcte, 0 points pour une réponse fausse, 1 point si vous ne choisissez aucune réponse. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Juste pour Senior : Les exercices de preuve seront notés sur 9 points chacun. Des solutions écrites doivent être fournies.

Veillez remplir les informations ci-dessous. Veillez écrire vos réponses aux questions à choix multiples dans le tableau sur la prochaine page.

PRÉNOM

NOM

CATÉGORIE

(Junior/Intermédiaire/Senior)

Exercice	Catégorie	Réponse (A,B,C,D, ou E)
1	J	
2	J	
3	J	
4	J	
5	J, I	
6	J, I	
7	J, I	
8	J, I	
9	J, I	
10	J, I	
11	J, I, S	
12	J, I, S	
13	I, S	
14	I, S	
15	I, S	
16	I, S	

Exercices

1. Les jumeaux Erik et Oskar doivent partager leur jeu favori pendant un an (du 1er janvier au 31 décembre). L'année n'est pas une année bissextile. Ils décident qu'Erik va avoir le jeu les jours du mois qui ont un nombre pair (donc le 2e de chaque mois, le 4e de chaque mois et ainsi de suite) et Oskar les jours qui ont un nombre impair. Cependant, ils réalisent qu'il y a plus de jours impairs que de jours pairs. En fait, combien en plus ?

A : 2

B : 5

C : 7

D : 12

2. Deux messieurs, M. Adams et M. Beckam, arrivent à une porte au même moment et doivent se mettre d'accord qui va entrer en premier. À intervalles réguliers, ils tentent de trouver un accord. À chaque tentative, ils peuvent parler (en disant « Tu vas en premier ») ou rester silencieux. S'ils parlent tous deux, personne n'entre. Si personne ne parle, personne n'entre. Si juste un des deux parle, celui qui est resté silencieux entre. S'ils parlent en même temps, M. Adams va rester silencieux pour au moins un tour, et M. Beckam pour au moins deux tours. Si personne n'a parlé pendant au moins 3 tours consécutifs, alors M. Beckam va parler au prochain tour. Aucun des deux messieurs ne connaît les règles de l'autre et ils ne s'accordent pas sur une stratégie. Doit-il y avoir, à un certain moment, un tour où un des deux messieurs entre par la porte ?

A : Oui

B : Non

3. Il y a quatre statues d'un elfe qui diffèrent seulement par leurs tailles. Les tailles sont XL (extra large), L (large), M (médium), S (petit) respectivement. Ils ont des poids différents qui décroissent dans cet ordre, c'est-à-dire la statue la plus large est la plus lourde, la deuxième plus grande est la deuxième plus lourde et ainsi de suite. Votre ami a pesé les statues en paires, et les poids des différentes paires, en grammes, sont

18, 24, 30, 30, 36, 42.

Quel est le poids total des quatre statues, en grammes ?

- A : 60
 - B : 120
 - C : 150
 - D : 180
-

4. Un enfant joue avec une voiture qui peut être manœuvrée à distance. La voiture peut tourner à droite et à gauche, mais juste à des angles de 90° . En plus, elle tourne exactement une fois après chaque mètre parcouru, et l'enfant peut juste choisir si ce sera un virage à gauche ou à droite. L'enfant joue sur un tapis rectangulaire de 3 mètres \times 4 mètres. En partant d'un coin du tapis, en parallèle à un des côtés du tapis, combien d'autres coins peuvent être atteints ?

- A : 1
 - B : 2
 - C : 3
-

5. Il y a un monde semblable au nôtre, mais où tous les gens sont soit des menteurs, soit des diseurs de vérité. Les menteurs mentent toujours et les diseurs de vérité disent toujours la vérité. Un enfant dit : « Tout le monde dans ma famille est un menteur. » Est-ce que cette assertion est :

- A : Vraie
 - B : Fausse
 - C : Forcément ni vraie ni fausse
-

6. Vous préparez une session de yoga, où les participants seront assis sur des chaises disposées en une rangée. Les chaises se trouvent l'une à côté de l'autre, sans espace entre deux chaises. Les participants, cependant, doivent être capables d'allonger leurs bras à gauche et à droite sans se toucher, donc entre chaque paire de chaises occupées, il faut y avoir deux chaises vides. Après avoir installé toutes les chaises en utilisant tout l'espace disponible, vous décidez d'enlever deux chaises d'un des deux côtés, parce que le nombre de chaises disponibles aux participants n'en diminuera pas. Quel est le reste, après division par 3, du nombre de chaises dans la rangée, après avoir enlevé les deux chaises ?

- A : 0
 - B : 1
 - C : 2
-

7. On vous laisse tirer N boules d'une urne qui contient un grand nombre de boules de chacune des couleurs suivantes : bleu, vert, jaune, rouge. Vous gagnez dès que vous tirez 1 boule bleue, ou 2 boules vertes, ou 3 boules jaunes, ou 4 boules rouges. Quelle est la valeur minimale de N pour laquelle vous êtes sûr(e) de gagner ?

- A : 4
 - B : 5
 - C : 6
 - D : 7
-

8. Dans un magasin, on vend un type de carrelage en forme triangulaire, et les côtés de chaque pièce mesurent 8, 12 et 18 centimètres. La forme vous plaît, mais vous avez besoin d'une pièce plus large. Le triangle que vous aimeriez avoir est semblable à ceux vendus au magasin et les côtés, en centimètres, sont à nouveau des entiers. En plus, deux de ses côtés mesurent 12 et 18 centimètres. Quelle est la longueur du troisième côté, en centimètres ?

- A : 24
 - B : 27
 - C : 30
 - D : 36
-

9. Alice a besoin de 4 heures pour peindre une clôture, tandis que Bob a besoin de 12 heures pour le même travail. Combien d'heures cela prendra-t-il si les deux travaillent ensemble sur la tâche ?

- A : 1
 - B : 2
 - C : 3
 - D : 4
-

10. Vous organisez une journée cinéma à votre école. Vous savez que 50% des élèves ont vu « Les alligators à l'attaque » (film A), et que 40% des élèves ont vu « Basket et biscuits » (film B). Vous savez que 20% des élèves qui ont vu le film A ont aussi vu le film B . Quel pourcentage des élèves qui ont vu film B ont aussi vu film A ?

A : 5%
B : 10%
C : 25%
D : 50%

11. Dans votre restaurant favori, vous avez la possibilité d'acheter des nuggets de tofu à emporter. Les nuggets sont vendus en paquets de 3, 5, ou 7. Il est donc impossible de commander par exemple précisément 2 nuggets de tofu. Combien d'entiers $n \geq 1$ existent-ils pour lesquels il est impossible d'acheter précisément n nuggets ?

A : 1
B : 2
C : 3
D : 4
E : 5

12. Votre classe fera une excursion et vos professeurs sont en train de remplir des sacs à déjeuner avec des sandwichs, un sac par élève. Les sacs à déjeuner et les sandwichs sont tous identiques. Chaque sandwich peut être coupé en 2 ou 3 parties égales. Vous savez qu'avec 14 sandwichs, on peut remplir 9 sacs mais pas 10 sacs. Combien de sandwichs ont été utilisés pour préparer des sacs à déjeuner pour les 24 élèves ?

A : 24
B : 30
C : 32
D : 36
E : 48

13. Dans un sac il y a des boules, et chaque boule est soit rouge, soit jaune, soit verte. Nous en tirons deux boules, sans remettre la première. La probabilité de tirer deux boules rouges est $\frac{1}{7}$ et celle de tirer deux boules jaunes est $\frac{1}{5}$. Quel est le nombre minimal de boules dans le sac pour que cette situation soit possible ?

A : 15

B : 35

C : 70

14. Les nouvelles plaques d'immatriculation luxembourgeoises consistent de deux lettres suivies par un nombre à 4 chiffres. Comme la lettre *O* et le chiffre 0 se ressemblent trop sur les plaques, un des deux symboles doit être interdit. Quel symbole faut-il interdire pour obtenir le nombre maximal de plaques possibles ? (L'alphabet considéré contient 26 lettres.)

A : La lettre *O*.

B : Le chiffre 0.

C : Le choix ne fait aucune différence.

15. Combien d'entiers $n \geq 1$ existent-ils pour lesquels $16n^2 + 25$ est le carré d'un nombre naturel ?

A : 0

B : 1

C : 2

D : 5

16. Il y a cinq petites statues d'un elfe, et vous connaissez leur poids combiné W . Les statues ont des tailles différentes, elles sont XL (extra large), L (large), M (médium), S (petit), XS (extra petit), et leurs poids décroissent dans cet ordre. Votre ami a pesé les statues en paires et a écrit la liste suivante des valeurs :

$$W_1, W_2, \dots, W_{10},$$

du plus grand au plus petit. Connaissant juste $W_2 + W_{10}$, quelle est la statue dont vous pouvez trouver le poids ?

A : XL
B : L
C : M
D : S
E : XS

Exercices de preuve, juste pour SENIOR

Problème 1. Soit $ABCD$ un rectangle avec $AB > BC$ et tel que $BC = 1$. Soit E le point différent de B tel que $CE = BC$ et $\angle AEC = 90^\circ$. Supposons que $\angle DCE = 30^\circ$. Trouvez la longueur AB .

Problème 2. Vous essayez de déplomber un code de 8 chiffres. Vous savez que le code représente l'anniversaire de quelqu'un qui est né entre l'année 1 (inclus) et aujourd'hui, dans le format $jjmmaaaa$ (par exemple, la date d'aujourd'hui serait 25022023). Vous avez aussi l'information suivante :

- Le jour est un nombre premier ;
- la décomposition en nombres premiers de l'année est donnée par $p \cdot (p + 10) \cdot (2p + 3)$, où p est un nombre premier ;
- la personne est née sur un mercredi.

Quel est le code ?

Problème 3. Le suivant est un nombre entier ; trouver sa valeur :

$$2\sqrt{\frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}+1}} + \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}.$$