

# MATH DAY 2023

## ІНСТРУКЦІЇ:

### Завдання

ПОЧАТКОВИЙ РІВЕНЬ: Завдання з 1 по 12 включно.

СЕРЕДНІЙ РІВЕНЬ: Завдання з 5 по 16 включно.

ВИСОКИЙ РІВЕНЬ: Завдання з 11 по 16 включно та три завдання на доведення.

**УВАГА** Виконані завдання поза вказаними не будуть зараховані!

### Оцінювання

Завдання складаються з вибору відповіді та оцінюються таким чином: 3 бали за правильну відповідь, 0 балів за неправильну відповідь, 1 бал за відсутність відповіді. Тільки одна відповідь на запитання є правильною. Тільки для ВИСОКОГО РІВНЯ: завдання на доведення оцінюються 9-ма балами кожне. Необхідно надати письмові розв'язання.

---

*Будь ласка, заповніть інформацію нижче. Запишіть свої відповіді на завдання з вибором відповіді у таблицю на наступній сторінці.*

---

ІМ'Я

---

ПРІЗВИЩЕ

---

РІВЕНЬ

(Початковий/Середній/Високий)

| Завдання | Рівень  | Відповідь (А,В,С,D або Е) |
|----------|---------|---------------------------|
| 1        | П       |                           |
| 2        | П       |                           |
| 3        | П       |                           |
| 4        | П       |                           |
| 5        | П, С    |                           |
| 6        | П, С    |                           |
| 7        | П, С    |                           |
| 8        | П, С    |                           |
| 9        | П, С    |                           |
| 10       | П, С    |                           |
| 11       | П, С, В |                           |
| 12       | П, С, В |                           |
| 13       | С, В    |                           |
| 14       | С, В    |                           |
| 15       | С, В    |                           |
| 16       | С, В    |                           |

## Завдання

1. Близнюки Ерік і Оскар повинні ділитися улюбленою грою протягом року (з 1 січня по 31 грудня). Рік не є високосним. Вони вирішують, що Ерік буде грати в парні числа місяця (2-е число кожного місяця, 4-е число кожного місяця і так далі), а Оскар — у непарні числа місяця. Однак, вони розуміють, що непарних днів більше, ніж парних. Насправді, на скільки більше?

- A: 2  
B: 5  
C: 7  
D: 12

Відповідь: C.

Розв'язання: Місяці з 28 або 30 днями мають однакову кількість парних і непарних днів. Сім місяців з 31 днем мають на один непарний день більше. Отже, відповідь 7 днів.

---

2. Двоє джентльменів, пан Адамс і пан Беккам, підходять до дверей одночасно й повинні домовитися, хто увійде першим. Через рівні проміжки часу вони роблять спроби дійти згоди. При кожній спробі вони можуть говорити (сказати «Ти перший») або мовчати. Якщо вони обидва говорять одночасно, ніхто не входить. Якщо ніхто не говорить, ніхто не входить. Якщо говорить лише один, входить джентльмен, що мовчав.

Якщо вони говорять одночасно, пан Адамс має мовчати, принаймні, один раунд, а пан Беккам — принаймні, два раунди. Якщо ніхто не говорить протягом, принаймні, 3 раундів поспіль, тоді пан Беккам буде говорити у наступному раунді. Жоден з джентльменів не знає правил, якими керується інший джентльмен, і вони не домовляються щодо стратегії. Чи, урешті-решт, станеться раунд, коли один джентльмен входить в двері?

- A: Так  
B: Ні

Відповідь: B.

Розв'язання: Наприклад, вони обидва можуть говорити на кожному четвертому ході і обидва мовчати між ними (мовчати протягом трьох ходів).

---

3. Є чотири статуї ельфа, які відрізняються лише розміром. Розміри XL (дуже великий), L (великий), M (середній), S (маленький) відповідно. Статуї мають різну вагу, яка зменшується в такому ж порядку, тобто найбільша статуя є найважчою, друга за розміром — другою за вагою і т.д. Ваш друг зважив статуї попарно, і вага різних пар у грамах становить

18, 24, 30, 30, 36, 42.

Яка загальна вага (у грамах) чотирьох статуй?

- A: 60
- B: 120
- C: 150
- D: 180

Відповідь: A.

Розв'язання: Підсумуйте вагу та розділіть на 3, або підсумуйте найменшу вагу (дві найлегші статуї) і найбільшу вагу (дві найбільші статуї). Можна також підсумувати вагу найбільшої та найменшої статуї і вагу двох середніх статуй, які повинні бути  $(XL + S)$  і  $(L + M)$  (випадково, що ці дві ваги однакові; будь-яка з двох сум може бути більшою). Або можна підсумувати вагу  $(XL + M)$  і  $(L + S)$ . У будь-якому випадку відповідь 60.

- 
4. Малюк грається машинкою, якою можна дистанційно керувати. Автомобіль може повертати ліворуч або праворуч лише на кут величиною  $90^\circ$ . Причому, після кожного пройденого метра, він повертає рівно один раз, і малюкові залишається тільки вирішувати, ліворуч це буде чи праворуч. Малюк грається на прямокутному килимі розміром  $3 \times 4$  метри. Автомобіль починає рух з одного із кутів килима вздовж однієї із сторін. До скількох інших кутів килима може дістатися автомобіль?

- A: 1
- B: 2
- C: 3

Відповідь: C.

Розв'язання: Відповіддю є 3, оскільки автомобіль може дістатися до всіх інших кутів. Відповідно до симетрії, не має значення, з якого кута ми починаємо. У координатній формі: нехай  $(0, 0)$  буде початком руху (початковий кут), а  $(4, 3)$  - протилежний кут. Деякі шляхи, що ведуть до інших 3 кутів:

$(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (4, 3)$

$(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 1), (4, 1), (4, 0)$

$(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 3), (0, 3)$

- 
5. В світі, схожому на наш, живуть люди, які або брехуни, або такі, що говорять правду. Брехуни завжди брешуть, а люди, які говорять правду, завжди говорять правду. Дитина каже: «У моїй родині всі брехуни». Це твердження:

A: Правда

B: Брехня

C: Не є ані правдою, ані брехнею

Відповідь: B.

Розв'язання: Твердження не може бути правдою, тому що, якби це було правдою, дитина була б брехуном (як член сім'ї брехунів), який говорить правду. Твердження може бути брехнею, наприклад, якщо лише половина членів родини є брехунами.

---

6. Ви готуєте заняття з йоги, де учасники будуть сидіти на стільцях, розташованих в ряд. Стільці стоять поруч, між ними немає вільного простору. Проте учасники повинні мати можливість витягнути руки в сторони, не торкаючись один одного. Тому між будь-якими двома зайнятими місцями має бути два вільних місця. Після розміщення стільців у ряд, зайнявши весь доступний простір, ви вирішуєте прибрати два стільці, оскільки це не зменшує кількості місць, доступних для учасників. Чому дорівнює остача при діленні на 3 кількості стільців в ряді, після того, як прибрати два стільці?

A: 0

B: 1

C: 2

Відповідь: B.

Розв'язання: Оптимально починати ряд із зайнятого місця. Додавання двох стільців не має значення, тоді і тільки тоді, коли останнє місце також є зайнятим. Це означає, що остача при діленні на 3 дорівнює 1.

---

7. Вам дозволено витягнути  $N$  кульок з коробки, що містить багато кульок кожного з наступних кольорів: синій, зелений, жовтий, червоний. Ви виграєте, якщо витягнете 1 синю кульку, або 2 зелених кульки, або 3 жовтих кульки, або 4 червоних кульки. Яке найменше можливе значення  $N$ , при якому ви гарантовано виграєте?

- A: 4
- B: 5
- C: 6
- D: 7

Відповідь: D.

Розв'язання: Якщо ви витягнете 1 зелену кульку, і 2 жовтих, і 3 червоних кульки, то ви програєте (це найбільш невдала ситуація). Витягнувши додаткову кульку будь-якого кольору, ви гарантовано виграєте. Отже,  $N = 7$ .

---

8. У магазині продають трикутні плитки, де кожна плитка має довжини сторін 8, 12 і 18 сантиметрів. Вам подобається форма, але вам потрібна плитка більшого розміру. Потрібний вам трикутник подібний до тих, що продаються в магазині, і довжини сторін у сантиметрах знову є цілими числами. Крім того, дві його сторони дорівнюють 12 і 18 сантиметрів. Яка довжина третьої сторони в сантиметрах?

- A: 24
- B: 27
- C: 30
- D: 36

Відповідь: B.

Розв'язання: Нехай  $X$  - довжина третьої сторони. Тоді ми маємо  $8/12 = 12/18 = 18/X$ . Отже  $X = 27$ .

---

9. Алісі потрібно 4 години, щоб пофарбувати паркан, а Бобу – 12 годин для виконання того ж завдання. Скільки годин займе фарбування паркану, якщо вони працюватимуть над завданням разом?

- A: 1
- B: 2
- C: 3
- D: 4

Відповідь: С.

Розв'язання: Якщо Аліса та Боб працюють  $X$  годин, то частина усього завдання, яке вони виконують, становитиме  $\frac{1}{4}X + \frac{1}{12}X$ . Завдання вважається виконаним, коли цей вираз дорівнює 1, тобто, якщо  $X = 3$ .

---

10. Ви організовуєте день кіно у своїй школі. Ви знаєте, що 50% учнів подивилися «Прибульці та алігатори» (фільм  $A$ ), а 40% учнів подивилися «Баскетбол і печиво» (фільм  $B$ ). Ви знаєте, що 20% учнів, які подивилися фільм  $A$ , також подивилися і фільм  $B$ . Який відсоток учнів, які подивилися фільм  $B$ , також подивилися і фільм  $A$ ?

- A: 5%
- B: 10%
- C: 25%
- D: 50%

Відповідь: С.

Розв'язання: Нехай (без втрати загальності) маємо загалом 100 учнів. Тоді 10 учнів подивилися фільми  $A$  і  $B$ , що відповідає 25% учнів, які подивилися фільм  $B$ .

---

11. У вашому улюбленому ресторані ви можете купити нагетси тофу на винос. Вони продаються в упаковках по 3, 5 або 7 штук. Таким чином, неможливо замовити, наприклад, точно 2 нагетси тофу. Скільки існує цілих чисел  $n \geq 1$ , для яких ви не можете купити саме  $n$  нагетсів?

- A: 1
- B: 2
- C: 3
- D: 4
- E: 5

Відповідь: С.

Розв'язання: Якщо кількість нагетсів кратна 3, ми можемо купити декілька упаковок по 3 нагетси в кожній. Якщо кількість нагетсів кратна 3 плюс 2 (принаймні 5), ми можемо купити упаковку, в якій 5 нагетсів і, можливо, декілька упаковок по 3 нагетси. Якщо кількість нагетсів кратна 3 плюс 1 (принаймні 7), тоді ми можемо купити упаковку, в якій 7 нагетсів і, можливо, декілька упаковок по 3 нагетси. Отже, єдине, що ми не можемо купити, це нагетси у кількості 1, 2 або 4 штуки.

---

12. Ваш клас готується до екскурсії і вчителі наповнюють сендвічами сумки для обіду, з розрахунку одна сумка для обіду на кожного учня. Сумки для обіду та сендвічі всі однакові. Кожен сендвіч можна розрізати на 2 або 3 рівні частини. Ви знаєте, що 14 сендвічами можна наповнити 9 сумок для обіду, але не 10. Скільки сендвічів пішло на наповнення сумок для обіду для 24 учнів?

- A: 24
- B: 30
- C: 32
- D: 36
- E: 48

Відповідь: D.

Розв'язання: Кількість сендвічів в кожній сумці є, зокрема, раціональним числом вигляду  $X/6$ . З інформації про 14 сендвічів, ми знаємо, що  $14/10 < X/6 \leq 14/9$ . Тоді отримуємо, що  $8 < X < 10$ , отже  $X = 9$ . Таким чином, кожна сумка містить  $9/6 = 3/2$  сендвіча, тому для 24 сумок потрібно  $24 \cdot 3/2 = 36$  сендвічів.

---

13. У мішечку знаходяться кульки червоного, жовтого або зеленого кольору. Вибираємо дві кульки поспіль, не повертаючи першу назад. Ймовірність взяти дві червоні кульки становить  $\frac{1}{7}$ , а дві жовті —  $\frac{1}{5}$ . Яка найменша кількість кульок у мішечку можлива, щоб це виявилось правдою?

- A: 15
- B: 35
- C: 70

Відповідь: A.

Розв'язання: Нехай  $n$  — число, яке ми шукаємо. Нехай  $r$  і  $y$  — кількість червоних і жовтих кульок відповідно. Нам дано

$$\frac{r(r-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{7}, \quad \frac{y(y-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{5},$$

отже,  $7r(r-1) = n(n-1) = 5y(y-1)$ . Це показує, що  $n(n-1)$  ділиться на 5 і на 7, тобто на 35. Найменший  $n \geq 1$ , для якого це виконується, становить  $n = 15$ . Щоб переконатися, що  $n = 15$  дійсно підходить, зауважимо, що при  $r = 6$  та  $y = 7$  отримуються бажані ймовірності.

---

14. Нові люксембурзькі номерні знаки складаються з двох літер, за якими йде 4-значний номер. Оскільки літера  $O$  і цифра  $0$  на табличках виглядають занадто схожими, один із двох символів потрібно заборонити. Який символ маємо заборонити, щоб отримати найбільшу кількість автомобільних номерів? (Алфавіт, що розглядається має 26 літер.)

А: Літеру  $O$ .

В: Цифру  $0$ .

С: Вибір не має значення.

Відповідь: А.

Розв'язання: Заборона літери  $O$  залишає  $25^2 \cdot 10^4$  дозволених автомобільних номерів, тоді як заборона цифри  $0$  залишає лише  $26^2 \cdot 9^4$ . Ми робимо висновок на основі нерівності  $25 \cdot 10^2 > 26 \cdot 9^2$ .

---

15. Скільки існує цілих чисел  $n \geq 1$ , для яких  $16n^2 + 25$  є квадратом натурального числа?

А: 0

В: 1

С: 2

Д: 5

Відповідь: В.

Розв'язання: Маємо  $(4n)^2 < 16n^2 + 25 < (4n+5)^2$ , отже, повний квадрат у вигляді  $16n^2 + 25$  має бути серед  $(4n+1)^2$ ,  $(4n+2)^2$ ,  $(4n+3)^2$  та  $(4n+4)^2$ . Оскільки  $16n^2 + 25$  є непарним, це не є ні  $(4n+2)^2$ , ні  $(4n+4)^2$ . Поклавши  $16n^2 + 25 = (4n+1)^2$ , отримаємо  $n = 3$ . Поклавши  $16n^2 + 25 = (4n+3)^2$ , отримаємо  $n = \frac{2}{3}$ , що не є цілим числом. Таким чином, враховується лише значення  $n = 3$ .

Альтернативне розв'язання: припустимо, що  $16n^2 + 25 = x^2$ , де  $x$  — ціле додатне число. Тоді  $25 = x^2 - 16n^2 = (x + 4n)(x - 4n)$ , а оскільки  $25 = 5^2$  є квадратом простого числа, єдину можливість дають рівняння:  $x + 4n = 25$  і  $x - 4n = 1$ , розв'язавши які, отримаємо  $n = 3$  і  $x = 13$ .

---

16. Є п'ять маленьких статуй ельфа, і ви знаєте їхню загальну вагу  $W$ . Статуї відрізняються за своїми розмірами: XL (дуже великі), L (великі), M (середні), S (малі), XS (дуже малі), і вони мають різну вагу, що зменшується в тому ж порядку. Ваш друг зважив статуї попарно і записав значення у порядку від найбільшого до найменшого

$$W_1, W_2, \dots, W_{10}.$$

Знаючи лише  $W_2 + W_{10}$ , вагу якої статуї можна дізнатися?

- A: XL
- B: L
- C: M
- D: S
- E: XS

Відповідь: B.

Розв'язання: Назвемо вагу статуї її розміром, наприклад, нехай  $XL$  буде вагою найбільшої та найважчої статуї. Зрозуміло, що  $W_1 = XL + L$  і, оскільки дві ваги, які ми підсумовуємо, мають бути різними, ми маємо  $W_2 = XL + M$ . Так само отримуємо  $W_{10} = S + XS$ . Таким чином,  $W_2 + W_{10} = XL + M + S + XS$ . Враховуючи, що  $L = W - (W_2 + W_{10})$ , ми можемо обчислити вагу  $L$ .

## Завдання на доведення (тільки для високого рівня)

**Завдання 1.** Нехай  $ABCD$  — прямокутник, у якому  $AB > BC$ , і такий, що  $BC = 1$ . Нехай  $E$  — точка, відмінна від  $B$  і така, що  $CE = BC$  та  $\angle AEC = 90^\circ$ . Припустимо, що  $\angle DCE = 30^\circ$ . Знайти довжину  $AB$ .

**Відповідь:**  $AB = \sqrt{3}$ .

*Доведення.* Дійсно,  $\angle EAC = \angle BAC$ , оскільки  $E$  є відображенням  $B$  відносно  $AC$ . Також точки  $E, C, B, A$  належать колу, а бісектриса кута  $\angle EAB$  співпадає із серединним перпендикуляром, проведеним до  $BE$ , та проходить через точку  $C$ . Якщо покласти

$$\alpha := \angle EAC = \angle BAC = \angle ACD$$

то  $\angle DCE = 90^\circ - 2\alpha$ . Так як  $\angle DCE = 30^\circ$ , тоді  $\alpha = 30^\circ$  і

$$AB = \frac{BC}{\operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{3}.$$

**Завдання 2.** Ви намагаєтеся зламати код із 8 цифр. Ви знаєте, що кодом є день народження людини, яка народилася між роком 1 (включно) і сьогоднішнім днем, у форматі ДДММРРРР (наприклад, сьогоднішня дата буде 25022023). Ви також маєте наступну інформацію:

- день є простим числом;
- простий розклад року задається  $p \cdot (p + 10) \cdot (2p + 3)$ , де  $p$  — просте число;
- людина народилася в середу.

Який код?

**Відповідь:** 11012023.

*Доведення.* Якщо перебрати прості числа по порядку, починаючи з 2, перше просте число  $p$ , для якого  $p+10$  та  $2p+3$  також є простими, буде  $p = 7$ . У цьому випадку, ми отримуємо  $7 \cdot 17 \cdot 17 = 2023$ , як рік. Більші від 2 прості числа, дають роки після 2023 року, тому їх можна відкинути. Отже, цей день мав бути в січні чи лютому 2023 року («до сьогоднішнього дня, 25 лютого»). Можна відраховувати назад від дати змагання, і єдина середа в 2023 році, яка припадає на потрібну дату — це 11 січня 2023 року. Отже, код 11012023.

**Завдання 3.** Нижче наведено ціле число; знайти його значення:

$$2\sqrt{\frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}+1}} + \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}.$$

**Відповідь:** 1.

*Доведення.* Позначимо шукане число через  $x$ . Тоді

$$\begin{aligned}x &= 2\sqrt{\frac{(2\sqrt{5}-4)(-\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(-\sqrt{5}+1)}} + \sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^3} \\&= 2\sqrt{\frac{6\sqrt{5}-14}{-4}} + (\sqrt{5}-2) \\&= \sqrt{-6\sqrt{5}+14} + \sqrt{5}-2 \\&= \sqrt{(-\sqrt{5}+3)^2} + \sqrt{5}-2 \\&= -\sqrt{5}+3 + \sqrt{5}-2 \\&= 1.\end{aligned}$$