MATH DAY 2024

Aufgaben

1. Im alten Ägypten besaß eine reiche Person viele Ushabtis (kleine Statuen, die unsterbliche Diener darstellen). Sie hatten "normale Ushabtis", einen für jeden Tag des Jahres, und einen "Anführer-Ushabtis" für jede volle Gruppe von 10 normalen Ushabtis. Wie hoch war die Gesamtzahl der Ushabtis?
   Bemerkung: Mit einem Jahr meinen wir 52 Wochen und 1 Tag.

   A: 400

   B: 401

   C: 410

   D: 411

Antwort: B.

Lösung: Es gab 365 normale Ushabtis und 36 Anführer-Ushabtis, also insgesamt 401 Ushabtis.

---

2. Wenn sechs 3D-Drucker sechs Tassen in sechs Minuten drucken, wie viele 3D-Drucker werden dann benötigt, um zwölf Tassen in zwölf Minuten zu drucken?
   Bemerkung: Die Drucker sind alle gleich, und die Tassen sind alle gleich.

   A: 24

   B: 12

   C: 6

   D: 3

Antwort: C.

Lösung: Die gegebenen sechs Drucker drucken zwölf Tassen (die doppelte Menge) in zwölf Minuten (die doppelte Zeit).

---

3. Ein Clown erzählt abwechselnd eine Wahrheit und eine Lüge. Der Clown sagt der Reihe nach die folgenden Sätze:
– Ich mag Pilze.
– Ich mag keine Pilze.
– Ich mag weder Pilze noch Zwiebeln.
– Ich mag entweder Pilze oder Zwiebeln.
Welche der folgenden Behauptungen ist richtig?

   A: Der Clown mag Zwiebeln und Pilze.

   B: Der Clown mag Zwiebeln, aber keine Pilze.

   C: Der Clown mag Pilze, aber keine Zwiebeln.

   D: Der Clown mag weder Zwiebeln noch Pilze.

Antwort: B.

Lösung: Es ist nicht möglich, dass die erste und die dritte Behauptung beide wahr sind (die erste sagt, dass der Clown Pilze mag, die dritte sagt, dass der Clown keine Pilze mag). Somit sind es die zweite und die vierte Behauptung, die wahr sind. Daher mag der Clown entweder Pilze oder Zwiebeln, und er mag keine Pilze. Der Clown mag also Zwiebeln, aber keine Pilze.

---

4. Man betrachte ein regelmäßiges Sechseck und eine Raute (= Rhombus) mit der gleichen Seitenlänge, so dass zwei Winkel der Raute gleich den Winkeln des Sechsecks sind. Wie groß ist das Verhältnis zwischen der Fläche des Sechsecks und der Fläche der Raute?

   A: 1

   B: 2

   C: 3

   D: 4

Antwort: C.

Lösung: Betrachten wir die übliche Aufteilung eines regelmäßigen Sechsecks in sechs gleichseitige Dreiecke (jedes Dreieck hat als Seite eine der Seiten des Sechsecks, und die gegenüberliegende Ecke ist der Mittelpunkt des Sechsecks). Dann bilden zwei benachbarte Dreiecke die gegebene Raute. Das Flächenverhältnis ist dann 6:2=3.

---

5. Die vier Freunde Amy, Ben, Chi und Dan haben Tassen in vier verschiedenen Farben gewählt, nämlich rot, grün, blau und gelb. Sie haben die folgenden Informationen:

- Die Tassen von Amy und Chi sind gelb und grün.
- Die Tassen von Amy und Dan sind rot und grün.

Welche Farbe hat Bens Tasse?

A: rot

B: grün

C: blau

D: gelb

Antwort: C.

Lösung: Wenn man die beiden Aussagen kombiniert, hat Amy die grüne Tasse. Chi hat also die gelbe Tasse und Dan hat die rote. Folglich hat Ben die blaue Tasse.

---

6. Man betrachte einen Code der Form $ABBA$, wobei A und B verschiedene Zahlen von 0 bis 9 sind, die die Bedingungen erfüllen: $A + B = B$ und $A + B = B \times B$. Wie viele Möglichkeiten gibt es für diesen Code?

A: 1

B: 2

C: 3

D: 4

Antwort: A.

Lösung: Die erste Beziehung besagt, dass $A = 0$. Die zweite Beziehung ist dann $B = B \times B$. Dies ist möglich für $B = 0$ und für $B = 1$. Da aber A und B verschieden sein müssen, folgern wir, dass $B = 1$. Es gibt also nur eine Möglichkeit für den Code, nämlich $ABBA = 0110$.

---

7. Elisa und Nicole haben beide eine gewisse Anzahl an Bonbons. Elisa gibt 1/3 ihrer Bonbons an Nicole, und gleichzeitig gibt Nicole 1/3 ihrer Bonbons an Elisa. Am Ende unterscheidet sich die Anzahl der Bonbons, die beide haben, um 6. Um wie viel unterschied sich die Anzahl der Bonbons vor dem Tausch?

A: 0

B: 6

C: 12

D: 18

Antwort: D.

Lösung: Es bezeichne E die Anzahl der Bonbons von Elisa und N die Anzahl der Bonbons von Nicole (vor dem Tausch). Nach dem Tausch hat Elisa $\frac{2}{3}E + \frac{1}{3}N$ Bonbons, während Nicole $\frac{2}{3}N + \frac{1}{3}E$ Bonbons hat. Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass Elisa am Ende mehr Bonbons hat als Nicole. Dann gilt $(\frac{2}{3}E + \frac{1}{3}N) = (\frac{2}{3}N + \frac{1}{3}E) + 6$, und folglich $\frac{1}{3}E = \frac{1}{3}N + 6$. Daraus folgt $E = N + 18$, d.h. die Anzahl der Bonbons unterschied sich um 18 vor dem Tausch.

---

8. Für das Kuchenrezept Ihrer Großeltern für 10 Personen werden 6 Eier und 600 Gramm Mehl verwendet. Um dem Rezept treu zu bleiben, ist es wichtig, das Verhältnis zwischen Eiern und Mehl beizubehalten. Sie müssen eine ganzzahlige Menge an Eiern verwenden. Wie viel Gramm Mehl verwenden Sie für einen Kuchen für 8 Personen?

   A: 400

   B: 450

   C: 480

   D: 500

Antwort: D.

Lösung: Für 8 Personen sollten Sie $6 \times \frac{8}{10} = 4,8$ Eier verwenden, also nehmen Sie 5 Eier. Da Sie $\frac{5}{6}$ der Eier verwenden, müssen Sie $\frac{5}{6}$ des Mehls verwenden, nämlich 500 Gramm.

---

9. Wir nennen eine Zahl *supergerade*, wenn alle ihre Ziffern gerade Zahlen sind. Wie hoch ist die Anzahl der supergeraden Zahlen von 0 bis 1000?

   A: 100

   B: 125

   C: 250

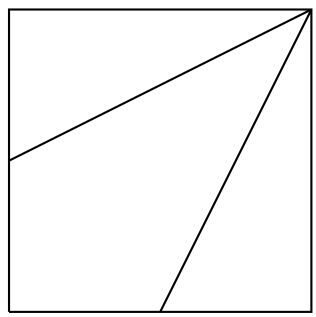
   D: 500

Antwort: B.

Lösung: Wir müssen alle nichtnegativen ganzen Zahlen mit ein bis drei Ziffern betrachten (weil 1000 nicht supergerade ist). Um die Fälle zu vereinheitlichen, betrachten wir stattdessen ein geordnetes Tripel gerader Ziffern, wobei jede dieser Ziffern Null sein kann. Dann können die drei Ziffern jede der Zahlen $0, 2, 4, 6, 8$ sein und sie können unabhängig voneinander gewählt werden. Wir haben also drei unabhängige Wahlmöglichkeiten mit jeweils 5 Möglichkeiten, was $5^3 = 125$ supergerade Zahlen innerhalb des gegebenen Bereichs ergibt.

---

10. Betrachten Sie ein Quadrat und verbinden Sie einen Eckpunkt des Quadrats mit den beiden Mittelpunkten der beiden nicht benachbarten Seiten. Dadurch wird das Quadrat in ein Viereck und zwei Dreiecke unterteilt. Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks, berechnet in Prozent des Flächeninhalts des gesamten Quadrats?



A: 60%

B: 55%

C: 54%

D: 50%

Antwort: D.

Lösung: Die beiden Dreiecke sind rechtwinklige Dreiecke: eine Seite ist gleich der Seitenlänge des Quadrats, eine andere gleich der Hälfte der Seitenlänge des Quadrats. Wir leiten daraus ab, dass jedes Dreieck eine Fläche von 25% der Fläche des Quadrats hat. Da die beiden Dreiecke zusammen 50% des Quadrats abdecken, deckt das Viereck die restlichen 50% des Quadrats ab.

---

11. Man betrachte die 16 Felder eines quadratischen 4×4 Spielbretts. Wie viele Felder können maximal gewählt werden, so dass keine vier Mittelpunkte der gewählten Felder die Eckpunkte eines Rechtecks mit zum Spielbrett parallelen Seiten bilden?

A: 7

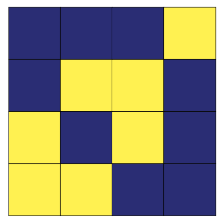
B: 8

C: 9

D: 10

Antwort: C.

Lösung: Wenn wir alle 4 Felder aus einer Zeile auswählen, dann können wir höchstens 1 Feld in jeder anderen Zeile wählen, also insgesamt höchstens 7 Felder. Wenn wir 3 Felder aus einer Zeile wählen, dann können wir höchstens 2 Felder in jeder der übrigen 3 Zeilen wählen. Das ergibt höchstens 9 Felder. Und wir können in der folgenden Konfiguration genau 9 Felder wählen:



Wenn wir aus jeder Zeile höchstens 2 Felder auswählen, erhalten wir höchstens 8 Felder. Die größtmögliche Anzahl von Feldern ist also 9.

---

12. Fünf Teenager teilen sich bei einem Abendessen einen runden Tisch. Die zugewiesenen Plätze sind, im Uhrzeigersinn: Amy, Ben, Cheng, Dan, Ed. Allerdings gefällt ihnen diese Anordnung überhaupt nicht. Jeder Teenager möchte keinen der beiden vorgesehenen Nachbarn als Nachbarn haben. Außerdem möchte Amy ihren ursprünglich zugewiesenen Platz behalten. Auf wie viele Arten können sie sich neu anordnen, damit alle ihre Wünsche erfüllt werden?

A: 0

B: 1

C: 2

D: 3

Antwort: C.

Lösung: Die neuen Nachbarn von Amy sind Cheng und Dan und es gibt zwei Möglichkeiten, nämlich Cheng links und Dan rechts von Amy oder umgekehrt. Dans neue Nachbarn sind Amy und Ben, also sitzt Ben neben Dan. Schließlich sitzt Ed zwischen Ben und Cheng. Dann gibt es nur zwei mögliche Konfigurationen: Amy, Dan, Ben, Ed, Cheng (entweder im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn).

---

13. Wir haben einige rote und blaue Kugeln in einer Urne. Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, ist 1/3. Wenn wir eine rote Kugel ziehen (und diese Kugel nicht in die Urne zurücklegen), dann ist die Wahrscheinlichkeit, eine weitere rote Kugel zu ziehen, 1/4. Wenn wir zwei rote Kugeln ziehen, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, eine dritte rote Kugel zu ziehen?

    A: 1/5

    B: 1/6

    C: 1/7

    D: 1/8

Antwort: C.

Lösung: Sei n die Anzahl der roten Kugeln, so gibt es $2n$ blaue Kugeln. Nach dem Ziehen einer roten Kugel bleiben $n-1$ rote Kugeln übrig, und es gibt dreimal so viele blaue Kugeln, also $2n = 3(n-1)$, was $n = 3$ ergibt. Nach dem Ziehen von zwei roten Kugeln bleiben also 6 blaue Kugeln und nur eine rote Kugel übrig. Die Wahrscheinlichkeit, eine dritte rote Kugel zu ziehen, ist also 1/7.

---

14. Hannah und Trevor spielen ein Glücksspiel. Sie werfen eine faire Münze mehrere Male. Hannah gewinnt, sobald 4 Mal KOPF herausgekommen ist, während Trevor gewinnt, sobald 4 Mal ZAHL herausgekommen ist. Sie haben die Münze nun 5 Mal geworfen: KOPF ist 3 Mal herausgekommen und ZAHL 2 Mal. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Hannah das Spiel gewinnt?

    A: 25%

    B: 50%

    C: 75%

    D: 100%

Antwort: C.

Lösung: Hannah braucht nur noch ein Mal KOPF, um zu gewinnen. Sie verliert also nur, wenn die nächsten beiden Würfe ZAHL ergeben, in diesem Fall gewinnt Trevor. Dies hat eine Wahrscheinlichkeit von 25%. Somit ist die Wahrscheinlichkeit für Hannahs Sieg 75%.

---

15. Charles nimmt an einem 10 km Rennen teil, bei dem er eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 12 km pro Stunde erreichen will. Nachdem er jedoch 5 Kilometer gelaufen ist, schaut er auf seine Uhr und stellt fest, dass seine Durchschnittsgeschwindigkeit bisher nur 10 Kilometer pro Stunde betrug. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit (in Stundenkilometern) muss Charles in der zweiten Hälfte des Rennens laufen, um sein Ziel zu erreichen?

    A: 14

    B: 15

    C: 16

    D: 17

Antwort: B.

Lösung: Wenn man mit 12 Stundenkilometern läuft, schafft man das 10 km Rennen in 50 Minuten, und das ist Charles' Ziel. Für die erste Hälfte des Rennens hat er 30 Minuten gebraucht, also hat er 20 Minuten für die zweite Hälfte. Wenn er 5 km in 20 Minuten läuft, ergibt sich eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 15 km pro Stunde für die zweite Hälfte des Rennens.

---

16. In einem Rechteck $ABCD$ gelte $\overline{AB} = 4\overline{AD}$. Die Eckpunkte E und F eines Parallelogramms $ABEF$ liegen auf der Geraden CD und der Winkel $\widehat{FAB}$ betrage $30°$. Wie groß ist das Verhältnis der Umfänge des Parallelogramms und des Rechtecks?

    A: 1,2

    B: 1,5

    C: 1,8

    D: 2

Antwort: A.

Lösung: Wenn $\overline{AD}$ gleich 1 Einheit ist, dann beträgt der Umfang des Rechtecks $ABCD$ 10 Einheiten. Das Dreieck DAF ist die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks und somit gilt $\overline{AF} = 2\overline{AD}$. Der Umfang des Parallelogramms $ABEF$ beträgt also 12 Einheiten. Somit ist das Verhältnis der Umfänge gleich $12/10 = 1,2$.

Lösungen zu den Beweisaufgaben:

Lösung zu Aufgabe 1: Es sei h die Höhe des Achtecks, also der Abstand zwischen zwei parallelen, gegenüberliegenden Seiten. Dann ist der Flächeninhalt des Quadrats h^2.
Es sei s die Seitenlänge des Achtecks. Das Komplement des Achtecks im Quadrat besteht aus vier Dreiecken, welche jeweils die Hälfte eines (kleineren) Quadrats mit der Seitenlänge $\frac{s}{\sqrt{2}}$ sind. Folglich gilt

$$h = s + 2 \times \frac{s}{\sqrt{2}} = s\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

und somit

$$h^2 = s^2\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 = s^2\left(3 + 2\sqrt{2}\right).$$

Die Fläche des Achtecks ist dann

$$h^2 - 2 \times \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 = s^2\left(2 + 2\sqrt{2}\right).$$

Das gesuchte Verhältnis ist

$$\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Ein alternative Argumentation ist, statt s die Seitenlänge t der vier kleinen Dreiecke in den Ecken zu verwenden. Wir können auch annehmen, dass das Quadrat ein Einheitsquadrat ist (d.h. $h = 1$). Dann ist die Seitenlänge des Achtecks $t\sqrt{2}$, also ist die Seitenlänge des großen Quadrats $1 = (2 + \sqrt{2})t$. Das ergibt $t = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Die Fläche des Achtecks ist

$$1 - 2t^2 = 1 - 2(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}) = 2\sqrt{2} - 2.$$

Folglich gilt für das gesuchte Verhältnis

$$\frac{1}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}. \qquad \square$$

Lösung zu Aufgabe 2: Die Bedingung führt zur Gleichung

$$\binom{A}{2} + \binom{B}{2} = AB.$$

Damit gilt $\frac{A(A-1)}{2} + \frac{B(B-1)}{2} = AB$. Umordnen nach Potenzen von B ergibt

$$B^2 - (2A + 1)B + A^2 - A = 0.$$

Aus der Lösungsformel für die allgemeine quadratische Gleichung folgt

$$B = \frac{2A+1 \pm \sqrt{(2A+1)^2 - 4(A^2 - A)}}{2} = \frac{2A+1 \pm \sqrt{8A+1}}{2}.$$

Die Lösung mit dem Pluszeichen erfüllt offenbar $B \geq A$, aber wir müssen die Lösung mit dem Minuszeichen verwerfen. In der Tat gilt

$$A > \frac{2A+1-\sqrt{8A+1}}{2}$$

da diese Ungleichung äquivalent ist zu

$$\sqrt{8A+1} > 1\,.$$

Es sei nun $8A+1 = v^2$ (daher $v \geq 3$ und v ist ungerade). Dann gilt

$$A = \frac{v^2-1}{8} = \frac{\frac{(v+1)}{2}\frac{(v-1)}{2}}{2} = \binom{\frac{v+1}{2}}{2}$$

und

$$B = \frac{2A+1+\sqrt{8A+1}}{2} = \frac{\frac{v^2-1}{4}+1+v}{2} = \frac{v^2+4v+3}{8} = \frac{\frac{(v+3)}{2}\frac{(v+1)}{2}}{2} = \binom{\frac{v+3}{2}}{2}.$$

Also ist $A = \binom{n}{2}$ und $B = \binom{n+1}{2}$, wobei $n = \frac{v+1}{2} \geq 2$ (n ist eine ganze Zahl, da v ungerade ist). Es folgt

$$A + B = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2\,.$$

Eine einfache Berechnung zeigt, dass diese Werte von n mit den entsprechenden Werten für A und B die Bedingung erfüllen. In der Tat müssen wir nur die Teilnehmer in zwei Gruppen aufteilen, wie oben vorgeschlagen:

$$A = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad B = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Dann gilt einerseits

$$AB = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4}\,.$$

Andererseits ist

$$\binom{B}{2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)}{2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)-2}{2}}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)(n+2)}{8}$$

und entsprechend

$$\binom{A}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)(n-2)}{8}\,.$$

Schließlich folgt

$$\binom{A}{2} + \binom{B}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)(2n)}{8} = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4}.$$

Wir haben also gezeigt, dass die Anzahl an Teilnehmern eine Zahl der Form n^2 mit $n \geq 2$ sein muss, und dass für jede solche Zahl die Bedingung

$$\binom{A}{2} + \binom{B}{2} = AB.$$

mit einer geeigneten Wahl von A und B erfüllt ist. $\square$