MATH DAY 2024

Exercices

1. En ancienne Égypte, une personne riche possédait de nombreux ushabtis (petites statues représentant des serviteurs immortels). Ils avaient des «ushabtis normaux», un pour chaque jour de l'année, et en plus ils avaient un «ushabti chef» pour chaque groupe complet de 10 ushabtis normaux. Quel était le nombre total d'ushabtis ?
   Remarque : Par année, on veut dire 52 semaines et 1 jour.
   A : 400
   B : 401
   C : 410
   D : 411

Réponse : B.

Solution : Il y avait 365 ushabtis normaux et 36 ushabtis chefs, ce qui fait un total de 401 ushabtis.

---

2. Si six imprimantes 3D impriment six tasses en six minutes, combien d'imprimantes 3D sont nécessaires pour imprimer douze tasses en douze minutes ?
   Remarque : Les imprimantes sont toutes identiques, les tasses sont toutes identiques.
   A : 24
   B : 12
   C : 6
   D : 3

Réponse : C.

Solution : Les six imprimantes données impriment douze tasses (deux fois la quantité) en douze minutes (deux fois le temps).

---

3. Un clown raconte en alternant une vérité et un mensonge. Le clown affirme, dans l'ordre, les assertions suivantes :
   – J'aime les champignons.

– Je n'aime pas les champignons.
– Je n'aime ni les champignons ni les oignons.
– J'aime soit les champignons, soit les oignons.
Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?
A : Le clown aime les oignons et les champignons.
B : Le clown aime les oignons mais pas les champignons.
C : Le clown aime les champignons mais pas les oignons.
D : Le clown n'aime ni les oignons ni les champignons.

Réponse : B.

Solution : Il n'est pas possible que la première et la troisième assertions soient toutes les deux vraies (la première dit que le clown aime les champignons, la troisième dit notamment que le clown n'aime pas les champignons). Donc ce sont la deuxième et la quatrième assertions qui sont vraies. Ensuite, le clown aime soit les champignons, soit les oignons, et il n'aime pas les champignons. Donc le clown aime les oignons mais pas les champignons.

---

4. On considère un hexagone régulier et un losange avec la même longueur de côté, de telle sorte que deux angles dans le losange soient les mêmes que les angles de l'hexagone. Quel est le rapport entre la surface de l'hexagone et la surface du losange ?
A : 1
B : 2
C : 3
D : 4

Réponse : C.

Solution : On considère la partition habituelle d'un hexagone régulier en six triangles équilatéraux (de sorte que chaque triangle a comme côté un des côtés de l'hexagone, et le sommet opposé est le centre de l'hexagone). Ensuite, deux triangles adjacents forment le losange donné. Le rapport des surfaces est alors de $6 : 2 = 3$.

---

5. Quatre amis, Amy, Ben, Chi, Dan, ont choisi des tasses de quatre couleurs distinctes, à savoir rouge, vert, bleu et jaune. Vous avez les informations suivantes :
— Les deux tasses d'Amy et Chi sont jaunes et vertes.
— Les deux tasses d'Amy et Dan sont rouges et vertes.
Quelle est la couleur de la tasse de Ben ?
A : rouge
B : verte
C : bleue

D : jaune

Réponse : C.

Solution : En combinant les deux assertions données, on déduit qu' Amy a la tasse verte. Ainsi, Chi a la tasse jaune et Dan a la tasse rouge. On conclue que Ben a la tasse bleue.

---

6. On considère un code de la forme $ABBA$, où A et B sont des nombres distincts entre 0 et 9 qui satisfont : $A + B = B$ et $A + B = B \times B$. Combien de possibilités existe-t-il pour ce code ?

   A : 1
   B : 2
   C : 3
   D : 4

Réponse : A.

Solution : La première relation dit que $A = 0$. La deuxième relation devient alors $B = B \times B$, ce qui implique que $B = 0$ ou $B = 1$. Cependant, comme A et B doivent être distincts, nous déduisons que $B = 1$. Ainsi, il n'y a qu'une seule possibilité pour le code, à savoir $ABBA = 0110$.

---

7. Élisa et Nicole ont des bonbons. Élisa donne 1/3 de ses bonbons à Nicole et, en même temps, Nicole donne 1/3 de ses bonbons à Élisa. À la fin, le nombre de bonbons qu'elles ont diffère de 6. De combien le nombre de bonbons différait-il avant l'échange ?

   A : 0
   B : 6
   C : 12
   D : 18

Réponse : D.

Solution : Appelons E le nombre de bonbons d'Élisa et N le nombre de bonbons de Nicole (avant l'échange). Après l'échange, Élisa a $\frac{2}{3}E + \frac{1}{3}N$ bonbons, tandis que Nicole a $\frac{2}{3}N + \frac{1}{3}E$ bonbons. Supposons sans perte de généralité qu' Élisa ait plus de bonbons que Nicole à la fin. Alors nous avons $\left(\frac{2}{3}E + \frac{1}{3}N\right) = \left(\frac{2}{3}N + \frac{1}{3}E\right) + 6$. Cela donne $\frac{1}{3}E = \frac{1}{3}N + 6$. Ainsi, $E = N + 18$ et le nombre de bonbons avant l'échange différait de 18.

---

8. La recette du gâteau de vos grands-parents pour 10 personnes utilise 6 œufs et 600 grammes de farine. Pour être fidèle à la recette, il est

important de préserver le rapport entre les œufs et la farine. Vous devez utiliser un nombre d'œufs entier. Combien de grammes de farine utilisez-vous pour faire un gâteau suffisant pour 8 personnes ?
A : 400
B : 450
C : 480
D : 500

Réponse : D.

Solution : Pour 8 personnes, tu dois utiliser $6 \times \frac{8}{10} = 4.8$ œufs, donc tu prends 5 œufs. Comme tu utilises $\frac{5}{6}$ des œufs, tu dois aussi utiliser $\frac{5}{6}$ de la farine, soit 500 grammes.

---

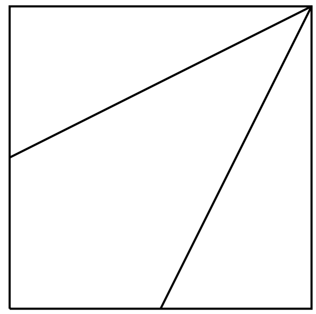
9. Un nombre est dit *super pair* si tous ses chiffres sont des nombres pairs. Quel est le nombre de nombres super pairs entre 0 et 1000 ?
A : 100
B : 125
C : 250
D : 500

Réponse : B.

Solution : Nous devons considérer tous les entiers non négatifs avec un à trois chiffres (car 1000 n'est pas super pair). Pour unifier les cas, nous considérons plutôt les triplets ordonnés de chiffres pairs, en permettant à chacun des chiffres d'être zéro. Ainsi, les trois chiffres peuvent prendre n'importe quelle valeur parmi $0, 2, 4, 6, 8$, et ils peuvent être choisis de manière indépendante. Nous avons donc trois choix indépendants avec 5 possibilités respectivement, ce qui donne $5^3 = 125$ nombres super pairs entre 0 et 1000.

---

10. Considérons un carré. On relie un sommet du carré aux deux points médians des deux côtés non adjacents. Cela subdivise le carré en un quadrilatère et deux triangles. Quelle est l'aire du quadrilatère, calculée en pourcentage par rapport à l'aire du carré entier ?



A : 60%
B : 55%
C : 54%
D : 50%

Réponse : D.

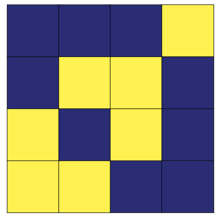
Solution : Les deux triangles sont des triangles rectangles : un côté est la longueur du côté du carré, l'autre côté est la moitié de la longueur du côté du carré. Nous en déduisons que chaque triangle a une aire de 25% de l'aire du carré. Puisque les deux triangles ensemble couvrent 50% du carré, le quadrilatère couvre les 50% restants du carré.

---

11. Considérons les 16 cases d'un plateau carré de dimensions 4×4. Au maximum, combien de cases peuvent être choisies de telle sorte qu'aucun ensemble de quatre points médians des cases choisies ne forme les sommets d'un rectangle dont les côtés sont parallèles au plateau carré ?
A : 7
B : 8
C : 9
D : 10

Réponse : C.

Solution : Si nous choisissons toutes les 4 cases d'une rangée, alors nous pouvons prendre au maximum 1 case dans n'importe quelle autre rangée différente, donc au total au maximum 7 cases.
Si nous choisissons 3 cases d'une rangée, alors nous pouvons choisir au maximum 2 cases dans chacune des 3 rangées restantes. Cela donne au maximum 9 cases. Et nous pouvons choisir précisément 9 cases dans la configuration suivante :



Si on choisit au plus 2 cases de chaque rangée, on obtient au maximum 8 cases. Donc, le nombre maximal possible de cases est 9.

---

12. Cinq adolescents se retrouvent à un dîner autour d'une table ronde. Les places désignées sont occupées dans le sens horaire par Amy, Ben, Cheng, Dan et Ed. Cependant aucun d'eux n'apprécie cette agencement. Chaque adolescent souhaite avoir des voisins différents des deux personnes prévues. De plus, Amy tient à rester à la place qui lui a été attribuée. Combien d'agencements différents peuvent-ils envisager pour que tous leurs souhaits soient satisfaits ?

    A : 0
    B : 1
    C : 2
    D : 3

Réponse : C.

Solution : Les nouveaux voisins d'Amy sont Cheng et Dan, ce qui offre deux possibilités : soit Cheng à gauche et Dan à droite d'Amy, soit l'inverse. Les nouveaux voisins de Dan sont Amy et Ben, donc Ben est assis à côté de Dan. Finalement, Ed se trouve entre Ben et Cheng. Il n'y a alors que deux configurations possibles : Amy, Dan, Ben, Ed, Cheng, les nommant soit dans le sens horaire, soit dans le sens inverse.

---

13. Des balles rouges et bleues se trouvent dans une urne. La probabilité de tirer une balle rouge est de 1/3. Si on tire une balle rouge (et qu'on ne remet pas cette balle dans l'urne), alors la probabilité de tirer une autre balle rouge est de 1/4. Si on tire deux balles rouges, quelle est la probabilité de tirer une troisième balle rouge ?

    A : 1/5
    B : 1/6
    C : 1/7
    D : 1/8

Réponse : C.

Solution : Soit n le nombre de balles rouges, alors il y a $2n$ balles bleues. Après avoir tiré une balle rouge, il reste $n-1$ balles rouges, et il y a trois fois plus de balles bleues, donc $2n = 3(n-1)$, ce qui donne $n = 3$. Ainsi, après avoir tiré deux balles rouges, il reste 6 balles bleues et seulement une balle rouge. Par conséquent, la probabilité de tirer une troisième balle rouge est de 1/7.

---

14. Fabienne et Pierre jouent à un jeu de hasard dans lequel ils lancent une pièce bien équilibrée à plusieurs reprises. Fabienne remporte la partie dès que FACE est apparue 4 fois, tandis que Pierre gagne dès que PILE est apparue 4 fois. Après avoir déjà lancé la pièce 5 fois, FACE est sortie 3 fois et PILE est sortie 2 fois. Quelle est la probabilité que Fabienne remporte le jeu ?
A : 25%
B : 50%
C : 75%
D : 100%

Réponse : C.

Solution : Fabienne a seulement besoin d'obtenir FACE une fois de plus pour gagner. Ainsi, elle perd seulement si deux PILES sortent ensuite, auquel cas Pierre gagne ; ce qui a une probabilité de 25%. Par conséquent, la probabilité de la victoire de Fabienne est de 75%.

---

15. Charles participe à un marathon de 10 km avec l'objectif de maintenir une vitesse moyenne de 12 km/h. Après avoir parcouru 5 km, il remarque que sa vitesse moyenne jusqu'à présent n'a été que de 10 km/h. Quelle vitesse moyenne, en km/h, Charles doit-il maintenir dans la deuxième moitié du marathon pour atteindre son objectif ?
A : 14
B : 15
C : 16
D : 17

Réponse : B.

Solution : En visant une vitesse constante de 12 km/h, le marathon de 10 km serait terminé en 50 minutes, l'objectif de Charles. Ayant déjà passé 30 minutes pour la première moitié, il lui reste 20 minutes pour la seconde. Courir 5 km en 20 minutes signifie maintenir une vitesse moyenne de 15 km/h. Donc, la réponse est 15 km/h.

---

16. Dans un rectangle $ABCD$, nous avons $\overline{AB} = 4\overline{AD}$. Les sommets E et F d'un parallélogramme $ABEF$ sont sur la droite CD et l'angle $\widehat{FAB}$ est de $30°$. Quel est le rapport des périmètres du parallélogramme et du rectangle ?
A : 1,2
B : 1,5
C : 1,8
D : 2

Réponse : A.

Solution : Lorsque $\overline{AD}$ est de 1 unité, le périmètre du rectangle $ABCD$ est de 10 unités. Comme le triangle DAF représente la moitié d'un triangle équilatéral, alors $\overline{AF} = 2\overline{AD}$. Cela donne un périmètre de 12 unités pour le parallélogramme $ABEF$. Ainsi, le rapport des périmètres est de $12/10 = 1{,}2$.

Solutions aux Problèmes de Démonstration

SOLUTION AU PROBLÈME 1 : Désignons par h la hauteur de l'octogone, c'est-à-dire la distance entre deux côtés parallèles opposés. Ainsi, l'aire du carré est h^2. Désignons par s la longueur du côté de l'octogone. Le complément de l'octogone dans le carré se compose de quatre triangles, chacun étant la moitié d'un carré (plus petit) avec un côté de $\frac{s}{\sqrt{2}}$. Ainsi, on a

$$h = s + 2 \times \frac{s}{\sqrt{2}} = s\left(1+\sqrt{2}\right),$$

et donc

$$h^2 = s^2\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = s^2\left(3+2\sqrt{2}\right).$$

L'aire de l'octogone vaut alors

$$h^2 - 2 \times \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 = s^2\left(2+2\sqrt{2}\right).$$

Enfin, le rapport demandé est

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Un autre argument consiste à utiliser, au lieu de s, la longueur du côté t des quatre petits triangles dans les coins. De plus, nous pouvons supposer que le carré est un carré unitaire (c'est-à-dire $h = 1$). Ensuite, la longueur du côté de l'octogone est $t\sqrt{2}$, donc la longueur du côté du grand carré est $1 = (2+\sqrt{2})t$. Cela donne $t = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. L'aire de l'octogone est alors

$$1 - 2t^2 = 1 - 2(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}) = 2\sqrt{2} - 2.$$

Ainsi, le ratio demandé est

$$\frac{1}{2\sqrt{2}-2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}. \qquad \square$$

SOLUTION AU PROBLÈME 2 : La condition donnée se traduit par l'équation

$$\binom{A}{2} + \binom{B}{2} = AB.$$

On a alors $\frac{A(A-1)}{2} + \frac{B(B-1)}{2} = AB$. En réorganisant selon les puissances de B, on obtient

$$B^2 - (2A+1)B + A^2 - A = 0.$$

Par la formule quadratique, on a alors

$$B = \frac{2A+1 \pm \sqrt{(2A+1)^2 - 4(A^2 - A)}}{2} = \frac{2A+1 \pm \sqrt{8A+1}}{2}.$$

La solution avec le signe plus satisfait clairement $B \geq A$, mais nous devons rejeter la solution avec le signe moins. En effet, nous avons

$$A > \frac{2A+1-\sqrt{8A+1}}{2}$$

car cette inégalité équivaut à

$$\sqrt{8A+1} > 1\,.$$

Écrivons $8A+1 = v^2$, de telle façon que $v \geq 3$ et v est un nombre impair. On a alors

$$A = \frac{v^2-1}{8} = \frac{\frac{(v+1)}{2}\frac{(v-1)}{2}}{2} = \binom{\frac{v+1}{2}}{2}$$

et

$$B = \frac{2A+1+\sqrt{8A+1}}{2} = \frac{\frac{v^2-1}{4}+1+v}{2} = \frac{v^2+4v+3}{8} = \frac{\frac{(v+3)}{2}\frac{(v+1)}{2}}{2} = \binom{\frac{v+3}{2}}{2}.$$

Ainsi $A = \binom{n}{2}$ et $B = \binom{n+1}{2}$ avec $n = \frac{v+1}{2} \geq 2$ (n est un nombre entier car v est impair). D'où

$$A + B = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2\,.$$

Un calcul simple montre que ces valeurs de n avec les valeurs correspondantes pour A et B satisfont la condition. En effet, il suffit de diviser les concurrents en deux groupes comme suggéré précédemment :

$$A = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad B = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

D'une part, nous avons

$$AB = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4}\,.$$

D'autre part, nous avons

$$\binom{B}{2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)}{2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)-2}{2}}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)(n+2)}{8}\,,$$

et de manière similaire, on obtient

$$\binom{A}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)(n-2)}{8}\,.$$

On en déduit que

$$\binom{A}{2} + \binom{B}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)(2n)}{8} = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4}\,.$$

Nous avons ainsi démontré que le nombre de participants doit être de la forme n^2 pour $n \geq 2$, et nous avons également prouvé que chacun de ces nombres, pour un choix approprié de A et B, satisfait la condition demandée

$$\binom{A}{2} + \binom{B}{2} = AB. \qquad \square$$

Exercice	Catégorie	Réponse (A,B,C ou D)
1	J	B
2	J	C
3	J	B
4	J	C
5	J, I	C
6	J, I	A
7	J, I	D
8	J, I	D
9	J, I	B
10	J, I	D
11	J, I, A	C
12	J, I, A	C
13	I, A	C
14	I, A	C
15	I, A	B
16	I, A	A