MATH DAY 2024

Proof Problem/Problème de démonstration/ Beweisaufgabe 1

A regular octagon is inscribed in a square (the sides of the square extending four sides of the octagon). Compute the ratio between the area of the square and the area of the octagon.

Un octogone régulier est inscrit dans un carré (les côtés du carré prolongent quatre côtés de l'octogone). Calculez le rapport entre la surface du carré et la surface de l'octogone.

Ein regelmäßiges Achteck ist in ein Quadrat eingeschrieben (die Seiten des Quadrats verlängern vier Seiten des Achtecks). Berechnen Sie das Verhältnis zwischen der Fläche des Quadrats und der Fläche des Achtecks.

Proof Problem 2

Remark that this problem is subdivided into 5 steps. Each step can be done assuming the results from the previous ones.

In a tournament, each contestant plays with each other contestant exactly once. The contestants are partitioned into two non-empty groups with A participants and B participants respectively (suppose without loss of generality that $A \leq B$). The first phase of the tournament sees the matches between contestants that belong to the same group. The second phase sees the matches between contestants of different groups. By chance, there is the same number of matches in the first phase and in the second phase. Our goal is to find the possible number of contestants.

Comment: We use the notation $\binom{n}{k}$ for the binomial coefficient $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1. Prove that $B^2 - (2A+1)B + A^2 - A = 0$.

2. Prove that
$$B = \frac{2A+1+\sqrt{8A+1}}{2}.$$

3. Letting $8A+1 = v^2$ with $v \geq 0$, prove that
$$A = \binom{\frac{v+1}{2}}{2} \text{ and } B = \binom{\frac{v+3}{2}}{2}.$$

4. Prove that for $n = \frac{v+1}{2}$ we have
$$A + B = n^2 \, .$$

5. Prove that the possible number of the participants to the tournament is precisely any value of n^2 for $n \geq 2$ (if A and B are suitably chosen).

Problème de démonstration 2

Notez que ce problème est subdivisé en 5 étapes. Chaque étape peut être effectuée en supposant les résultats des étapes précédentes.

Dans un tournoi, chaque participant joue exactement une fois contre chaque autre participant. Les participants sont répartis en deux groupes non vides de A et B participants respectivement (supposons sans perte de généralité que $A \leq B$). La première phase du tournoi comporte seulement les matchs entre les participants appartenant au même groupe. La deuxième phase comporte seulement les matchs entre les participants des deux groupes différents. Par chance, il y a le même nombre de matchs dans la première phase que dans la deuxième phase. L'objectif est de trouver le nombre possible de participants.

Remarque: On utilise la notation $\binom{n}{k}$ pour le coefficient binomial $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1. Montrer que $B^2 - (2A+1)B + A^2 - A = 0$.

2. Montrer que
$$B = \frac{2A + 1 + \sqrt{8A+1}}{2} \, .$$

3. En posant $8A + 1 = v^2$ avec $v \geq 0$, montrer que
$$A = \binom{\frac{v+1}{2}}{2} \text{ et } B = \binom{\frac{v+3}{2}}{2}.$$

4. Montrer que pour $n = \frac{v+1}{2}$, on a
$$A + B = n^2 \, .$$

5. Montrer que le nombre possible de participants au tournoi est précisément toute valeur de la forme n^2 pour $n \geq 2$ (si A et B sont convenablement choisis).

Beweisaufgabe 2

Diese Aufgabe ist in 5 Schritte unterteilt. Bei jedem Schritt können die Ergebnisse der vorangegangenen Schritte vorausgesetzt werden.

In einem Wettkampf spielt jeder Teilnehmer gegen jeden anderen Teilnehmer genau einmal. Die Teilnehmer werden in zwei nichtleere Gruppen mit A bzw. B Teilnehmern eingeteilt (ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass $A \leq B$). In der ersten Phase des Wettkamps finden die Spiele zwischen Teilnehmern statt, die derselben Gruppe angehören. In der zweiten Phase werden die Spiele zwischen Teilnehmern verschiedener Gruppen ausgetragen. Zufällig gibt es in der ersten und in der zweiten Phase die gleiche Anzahl von Spielen. Ziel ist es, die mögliche Anzahl der Teilnehmer zu ermitteln.
Bemerkung: Wir verwenden die Schreibweise $\binom{n}{k}$ für den Binomialkoeffizienten $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1. Zeigen Sie $B^2 - (2A+1)B + A^2 - A = 0$.
2. Zeigen Sie
$$B = \frac{2A+1+\sqrt{8A+1}}{2}\,.$$
3. Man setze $8A+1 = v^2$ mit $v \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann
$$A = \binom{\frac{v+1}{2}}{2} \text{ und } B = \binom{\frac{v+3}{2}}{2} gilt.$$
4. Zeigen Sie, dass für $n = \frac{v+1}{2}$ gilt
$$A + B = n^2\,.$$
5. Beweisen Sie, dass die mögliche Teilnehmerzahl des Turniers genau eine Zahl der Form n^2 mit $n \geq 2$ ist (falls A und B geeignet gewählt sind).