MathDay 2022 Intermediate

Questions (12 questions sans preuves)

1. Un stand forain propose un jeu avec une roue de la fortune. Les nombres 1 à 5 sont écrits sur la roue, et quand elle est tournée, chaque nombre sort avec une probabilité égale.

   Pour jouer au jeu, vous pariez sur n'importe quel nombre entre 2 et 10 (inclus) de votre choix. La roue tourne alors deux fois et si la somme des deux nombres obtenus est égale au nombre sur lequel vous avez parié, vous gagnez un ours en peluche. Sinon, vous ne gagnez rien. Sur quel numéro miser pour maximiser vos chances de gagner l'ours en peluche ?

   Réponse correcte : 6
   Solution : Appelons x le résultat du premier tour, et y le résultat du deuxième tour (x et y sont des entiers de 1 à 5). Lorsque vous comptez toutes les sommes possibles que la paire (x, y) peut donner, 6 apparaît cinq fois, tandis que tous les autres nombres apparaissent moins souvent.

2. Quel est le nombre maximum de reines que vous pouvez placer sur un échiquier de taille 5×5, de sorte qu'il n'y ait pas deux reines sur la même diagonale, ligne ou colonne ?

   Réponse correcte : 5
   Solution : On peut les placer en a4, b2, c5, d3, e1. Cela ne peut être plus que 5, car il y a 5 colonnes et on ne peut mettre plus d'une reine par colonne.

3. Soixante enfants ont reçu une invitation à une fête d'anniversaire, mais tous ne sont pas venus. Lors de la fête, les enfants ont joué à un jeu se jouant en équipes de 12 joueurs et aucun enfant n'a été laissé sans équipe. Ils ont également joué à un jeu se jouant en équipes de 5 joueurs : un enfant ne faisait pas partie d'une équipe, et il est devenu arbitre pour ce jeu. Combien d'enfants étaient présents à la fête ?

   Réponse correcte : 36.
   Solution : On cherche un nombre de 0 à 60 qui est un multiple de 12 et dont la division euclidienne par 5 a pour reste 1. Le seul nombre de cette forme est 36.

4. Vous avez deux pommes identiques, deux oranges identiques et une banane. Vous devez les donner à cinq enfants, de manière à ce que chaque enfant reçoive précisément un fruit. De combien de manières différentes pouvez-vous distribuer les fruits aux enfants ?

Réponse correcte : 30

Solution : Vous n'avez qu'à choisir à qui donner la banane (5 choix) et à qui donner les deux oranges. En écartant l'enfant qui a pris la banane, il reste quatre enfants et il faut sélectionner une paire d'enfants pour les oranges (12 choix, car il y a 4 choix pour le premier enfant, 3 choix pour le deuxième enfant). Comme l'ordre n'a pas d'importance, vous divisez par 2 et vous vous retrouvez avec 6 possibilités. Il y a donc 30 possibilités au total.

5. Dans un pays étranger, il existe une devise monétaire appelée AUR. Il existe des pièces d'or d'une valeur de 1AUR ou 3AUR ou 9AUR. De combien de pièces avez-vous besoin au minimum pour pouvoir payer n'importe quelle facture d'un montant compris entre 1AUR et 107AUR ? Vous pouvez librement choisir les pièces, mais vous devez les choisir avant de connaître le montant de la facture.

   Réponse correcte : 15.

   Solution : Vous pouvez prendre 11 pièces de 9AUR, 2 de 3AUR, et 2 de 1AUR. C'est optimal car avec seulement 10 pièces ou moins de 9AUR, il faudrait au moins 17 pièces pour payer 107 AUR (10 x 9AUR + 5 x 3AUR + 1 x 1AUR), et avec 11 pièces de 9 AUR, il faut moins 4 pièces en plus pour payer 107 AUR. Avec ces 15 pièces on peut effectivement payer toutes les factures : en utilisant les pièces de 9AUR on se ramène à payer un montant compris entre 1AUR et 8AUR, ce qui est bien faisable avec 2 pièces de 3AUR et 2 de 1AUR.

6. Alice et Zoe, lorsqu'elles courent seules, courent toujours à leur vitesse habituelle qui est constante. Alice parcourt 1 kilomètre en 4 :10 (4 minutes et 10 secondes), tandis que Zoé parcourt 1 kilomètre en 5 :00. Elles ont prévu de courir ensemble sur un chemin rectiligne le long de la rivière qui fait 11km de long. Elles viennent de s'envoyer un message et ont découvert que, sur un malentendu, elles se trouvaient aux deux extrémités différentes du chemin. Elles commencent alors à courir l'une vers l'autre. Au bout de combien de temps vont-elles se rencontrer ? Donnez votre réponse en minutes.

   Réponse correcte : 25.

   Solution : Alice court 1km en 250 secondes, Zoe en 300 secondes, donc la vitesse d'Alice est 6/5 de la vitesse de Zoe. Par conséquent, elles se rencontreront après qu'Alice a parcouru 6/11 de la distance totale et Zoe 5/11 de la distance totale. Ainsi, Alice a couru 6km, ce qui prendra 25 minutes.

7. Vous arrivez sur une île habitée par 7 nains. Un nain peut soit dire la vérité, soit être un menteur. Les diseurs de vérité disent toujours la vérité et les menteurs mentent toujours. Tous les nains font la queue en ligne droite pour vous accueillir. Ils regardent tous dans votre direction.
   Le premier nain de la file dit : "Tous les nains derrière moi sont des menteurs."
   Tous les autres nains disent : "Le nain juste devant moi est un menteur."
   Combien de nains mentent ?

   Réponse correcte : 4

   Solution : Les nains juste derrière les menteurs sont des diseurs de vérité, donc le premier nain doit être un menteur. Les nains juste derrière les diseurs de vérité sont des menteurs, donc les menteurs et les diseurs de vérité alternent, ce qui donne un total de 4 menteurs.

8. Vous avez un appel vidéo avec des amis qui sont des locuteurs natifs de la langue combi. Vous ne vous souvenez que de quatre mots différents dans la langue combi : Xix, Yiy, Ziz, Wiw. Précisément l'un d'entre eux est extrêmement drôle. Vous savez que si vous écrivez certains de ces mots à l'un de vos amis, votre ami se mettra immédiatement à rire si et seulement si le mot drôle fait partie des mots que vous avez choisis.
Vous pouvez écrire exactement un message avec des mots combi à chacun de vos amis en ligne. Vous pouvez choisir le nombre de mots et quels mots écrire. Vous pouvez envoyer différents messages individuels, mais tous les messages sont envoyés en même temps. Ensuite, vous pouvez vérifier dans l'appel vidéo qui rit. Combien d'amis au minimum doivent être présents dans l'appel vidéo pour que vous puissiez déterminer le mot amusant avec la méthode ci-dessus dans tous les cas ?
Réponse correcte : 2
Solution : Un ami ne suffit pas car en testant un seul message, vous ne pouvez pas déterminer le mot drôle. Deux amis suffisent : vous envoyez le premier mot uniquement au premier ami, le deuxième mot uniquement au deuxième, le troisième mot aux deux et le quatrième mot à aucun d'eux.

9. Amy et Ben s'affrontent au Jeu des Bonbons. Au départ, il y a 10 bonbons. Amy et Ben jouent l'un après l'autre. Chaque joueur peut lors de son tour retirer 2 ou 3 bonbons. Le premier joueur qui ne peut pas jouer (car il reste moins de 2 bonbons) a perdu. Amy joue en premier. Si Amy et Ben souhaitent tous les deux gagner et qu'ils adoptent la meilleure stratégie possible, qui gagne ? Répondez 1 pour Amy et répondez 2 pour Ben.
Réponse correcte : 2.
Solution : Considérons le nombre de bonbons restants. Avec 0 ou 1 bonbons on est perdant. Avec 2,3 ou 4 bonbons on est gagnant (pour 4 bonbons choisir de prendre 3 bonbons, pour 3 bonbons choisir de prendre 2 ou 3 bonbons, pour 2 bonbons choisir de prendre 2 bonbons). Avec 5 ou 6 bonbons, on est perdant (prendre 2 ou 3 bonbons place l'autre joueur dans une situation gagnante). Avec 7, 8 ou 9 bonbons, l'un est le gagnant (prendre 2 ou 3 bonbons place l'autre joueur dans une situation perdante). Avec 10 bonbons on est perdant (prendre 2 ou 3 bonbons place l'autre joueur dans une situation gagnante). Donc Ben gagne à coup sûr.

10. Un musée très moderne d'art très moderne a deux étages, l'un au-dessus de l'autre. Chaque étage se compose de quatre couloirs reliés et formant un carré. Il est possible de passer de chaque couloir aux deux voisins du même étage. Au bout de chaque couloir se trouve un escalier reliant verticalement les deux étages. La seule entrée est également la seule sortie et elle est située dans un coin du

rez-de-chaussée. Vous voulez marcher le long de chaque couloir exactement une fois (la direction n'a pas d'importance pour vous). Vous pouvez effectuer différents circuits, selon l'ordre dans lequel vous visitez les couloirs. Combien y a-t-il de circuits différents, supposant que vous preniez l'escalier exactement deux fois ?

Réponse correcte : 16

Solution : Vous êtes obligés d'utiliser les mêmes escaliers deux fois. Donc vous avez 4 choix pour les escaliers et pour chaque étage, vous avez 2 choix pour la direction dans laquelle vous allez. Donc en total, vous avez $4 \times 2 \times 2 = 16$ différents circuits possibles.

11. Vous avez une pièce qui, lorsqu'elle est lancée, revient plus souvent face que pile. Vous et un ami jouez au jeu suivant : vous lancez la pièce deux fois. Si le résultat est deux fois le même, vous gagnez. Si les résultats des lancers sont différents, votre ami gagne. Qui est le plus susceptible de gagner ? Répondez 1 si vous avez une plus grande probabilité de gagner, répondez 2 si votre ami a une plus grande probabilité de gagner, répondez 3 si vous et votre ami avez la même probabilité de gagner.

    Réponse correcte : 1

    Solution : Soit h la probabilité de faire face et $1-h$ celle de faire pile. Obtenir deux fois le même résultat a pour probabilité $h^2+(1-h)^2 = 1+2h^2-2h$, alors qu'obtenir deux résultats différents a pour probabilité $2h(1-h) = 2h-2h^2$. La différence est donc $(1+2h^2-2h)-(2h-2h^2) = 1-4h+4h^2 = (1-2h)^2$. Cela est positif sauf lorsque $h = 1/2$, ce qui est exclus. Donc il est plus probable d'obtenir deux fois le même résultat que deux résultats différents.

12. Vous possédez un sac de pâtes en forme de lettres pour enfants. Il y a 26 lettres différentes. Si vous prenez 99 pâtes du sac, quel est le plus grand nombre entier n tel que vous puissiez être sûr d'avoir au moins n pâtes représentant la même lettre ?

    Réponse correcte : 4

    Solution : C'est le principe des tiroirs. Avec 99 pâtes de 26 types différents, il y a au moins $\lceil 99/26 \rceil = 4$ pâtes du même type.