MathDay 2022 Intermediate

Aufgaben (12 Aufgaben ohne Beweis)

1. Eine Jahrmarktsbude bietet ein Spiel mit dem Rad der Fortuna an. Auf dem Rad sind die Zahlen von 1 bis 5 markiert und wenn es gedreht wird, kommen alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit vor. Um das Spiel zu spielen, setzt du auf eine beliebige Zahl zwischen 2 und 10 (miteinbegriffen). Das Rad wird nun zweimal gedreht und wenn die Summe der zwei resultierenden Zahlen gleich der Zahl ist, auf die du gesetzt hast, so gewinnst du ein Plüschtier. Andernfalls gewinnst du nichts. Auf welche Zahl solltest du setzen, um eine höchstmögliche Gewinnchance zu haben?

   Richtige Antwort: 6

   Lösung: Sei x die Zahl aus der ersten Drehung, und y die Zahl aus der zweiten Drehung (x und y sind ganze Zahlen zwischen 1 und 5). Wenn man alle möglichen Summen betrachtet, die (x, y) bilden können, dann kommt 6 fünfmal vor, alle anderen Zahlen aber weniger oft.

2. Man betrachte ein 5×5 Schachbrett. Wie viele Königinnen kann man maximal auf dem Brett platzieren, ohne dass zwei Königinnen in der gleichen Reihe, Kolonne oder Diagonalen stehen?

   Richtige Antwort: 5

   Lösung: Zum Beispiel kann man die Königinnen auf a4, b2, c5, d3 und e1 platzieren. Es können nicht mehr als 5 sein, weil in jeder Kolonne maximal eine Königin stehen darf und es 5 Kolonnen gibt.

3. Sechzig Kinder haben eine Einladung zu einer Geburtstagsfeier erhalten, aber nicht alle sind gekommen. Auf der Feier werden verschiedene Spiele veranstaltet. Beim ersten Spiel werden Teams mit 12 Spielern gebildet, hierbei können alle Kinder in Teams aufgeteilt werden. Beim zweiten Spiel werden Teams mit 5 Spielern gebildet, hierbei gibt es ein Kind, das übrig bleibt und die Rolle des Schiedsrichters übernimmt. Wie viele Kinder nehmen insgesamt an der Geburtstagsfeier teil?

   Richtige Antwort: 36
   Lösung: Gesucht ist eine Zahl zwischen 0 und 60, die ein Vielfaches von 12 ist und deren Rest bei Division durch 5 gleich 1 ist. Die einzige Zahl, die dies erfüllt, ist 36.

4. Gegeben seien zwei identische Äpfel, zwei identische Orangen und eine Banane. Diese sollen unter fünf Kindern aufgeteilt werden, wobei jedes Kind genau

eine Frucht bekommen soll. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die fünf Früchte unter den fünf Kindern aufzuteilen?

Richtige Antwort: 30
Lösung: Da die Äpfel identisch sind, reicht es, die Anzahl der Möglichkeiten, die Banane und die Orangen zu verteilen, zu bestimmen. Man hat 5 Möglichkeiten, die Banane zu verteilen, anschließend muss man noch zwei (identische) Orangen an vier Kinder verteilen. Dazu gibt es 6 Möglichkeiten. Die übrigen zwei Kinder bekommen die Äpfel. Insgesamt ergibt dies 30 Möglichkeiten.

5. In einem fremden Land gibt es die Währung AUR. Es gibt Geldstücke mit den Werten 1AUR, 3AUR und 9AUR. Wie viele Geldstücke benötigt man mindestens, um jeden Betrag zwischen 1AUR und 107AUR bezahlen zu können? Man kann jedes Geldstück beliebig oft wählen, aber man muss die Geldstücke wählen, bevor der zu zahlende Betrag bekannt ist.

   Richtige Antwort: 15
   Lösung: Man kann 11 x 9AUR, 2 x 3AUR und 2x 1AUR Münzen wählen. Dies ist optimal, da man mit höchstens 10 9AUR Münzen insgesamt mindestens 17 Geldstücke braucht, um den Betrag von 107AUR zu bezahlen (10 x 9AUR + 5 x 3AUR + 1 x 1AUR), und mit 11 9AUR Münzen benötigt man insgesamt mindestens 4 zusätzliche Geldstücke, um diesen Betrag zu bezahlen. Die gewählten Münzen erlauben es, jeden Betrag zwischen 1AUR und 107AUR zu bezahlen: aufgrund der 9AUR Münzen reicht es hierzu, jeden Betrag zwischen 1AUR und 8AUR bezahlen zu können, dies ist mit den jeweils 2 gewählten 3AUR und 1AUR Münzen möglich.

6. Alice und Zoe laufen, wenn sie alleine sind, beide mit ihren üblichen, konstanten Geschwindigkeiten. Alice läuft 1 Kilometer in 4:10 (4 Minuten und 10 Sekunden), während Zoe 1 Kilometer in 5:00 läuft. Die beiden wollten gemeinsam eine gerade, 11 Kilometer lange Strecke entlang eines Flusses ablaufen. Aufgrund eines Missverständnisses befinden sich die beiden jedoch an den jeweils entgegengesetzten Enden der Strecke. Also beschließen sie, aufeinenader zuzulaufen. Nach welcher Zeit treffen die beiden aufeinander, wenn sie gleichzeitig starten? (Die Antwort ist in Minuten).

   Richtige Antwort: 25
   Lösung: Alice läuft 1km in 250 Sekunden, Zoe in 300 Sekunden. Alices Geschwindigkeit beträgt somit 6/5 von Zoes Geschwindigkeit. Folglich treffen beide aufeinander, nachdem Alice 6/11 der Gesamtstrecke zurückgelegt hat (und Zoe 5/11), d.h. nach 6km, wofür Alice 25 Minuten braucht.

7. Du befindest dich auf einer Insel, die von 7 Zwergen bewohnt wird. Hierbei gibt es Zwerge, die stets lügen, während andere stets die Wahrheit sagen. Alle Zwerge stellen sich in einer Reihe vor dir auf und blicken in deine Richtung.
   Der erste Zwerg in der Reihe sagt: 'Alle Zwerge hinter mir sind Lügner.'

Alle anderen Zwerge sagen: 'Der Zwerg direkt vor mir ist ein Lügner.'
Wie viele Lügner gibt es insgesamt unter den 7 Zwergen?

Richtige Antwort: 4
Lösung: Zwerge, welche direkt hinter Lügnern stehen, sagen die Wahrheit, folglich muss der erste Zwerg ein Lügner sein. Zwerge, die direkt hinter einem Zwerg stehen, welcher die Wahrheit sagt, sind Lügner. Insgesamt folgt, dass Zwerge die lügen und solche, die die Wahrheit sagen, abwechselnd in der Reihe vorkommen, so dass es dann insgesamt 4 Lügner gibt.

8. Du bist in einer Videokonferenz mit Freunden, welche die kombische Sprache sprechen. Du selbst kennst nur 4 Wörter dieser Sprache, nämlich Xix, Yiy, Ziz, Wiw. Genau eines dieser Wörter ist sehr lustig, leider weißt du nicht mehr, welches. Wenn du deinen Freunden eine Nachricht schreibst, werden sie sofort lachen, wenn das lustige Wort enthalten ist, andernfalls jedoch nicht. Du kannst jedem deiner Freunde genau eine Nachricht mit kombischen Wörtern schreiben, wobei du selbst entscheiden kannst, wie viele und welche Wörter die Nachricht jeweils enthalten soll. Alle Nachrichten werden gleichzeitig verschickt, anschließend kannst du beobachten, welche deiner Freunde über ihre Nachricht lachen. Wie viele Freunde müssen mindestens an der Videokonferenz teilnehmen, damit du eindeutig anhand der oben beschriebenen Methode bestimmen kannst, welches der 4 Wörter das lustige Wort ist?

   Richtige Antwort: 2
   Lösung: Ein Freund reicht nicht aus, da es mit einer einzigen Nachricht nicht möglich ist, das lustige Wort eindeutig zu bestimmen. Zwei Freunde reichen jedoch aus: an den ersten schickst du das erste und dritte Wort, an den zweiten das zweite und dritte Wort. Lacht nur der erste Freund, ist das erste Wort das lustige, lacht nur der Zweite, ist es das zweite Wort. Lachen beide, ist es das dritte, lacht niemand, ist es das vierte.

9. Amy und Ben spielen das Bonbon-Spiel. Sie beginnen mit 10 Bonbons, anschließend sind die beiden abwechselnd an der Reihe, wobei jeder in seiner Runde 2 oder 3 Bonbons entfernt. Der erste Spieler, der nicht mehr spielen kann (weil weniger als 2 Bonbons übrig sind), hat verloren. Amy spielt zuerst. Wenn sowohl Ben als auch Amy jeweils die bestmögliche Strategie spielen, wer gewinnt dann das Spiel? (Antworte 1 für Amy und 2 für Ben)

   Richtige Antwort: 2.
   Lösung: Sind 0 oder 1 Bonbon übrig, verliert der Spieler, der gerade an der Reihe ist. Bei 2,3,4 Bonbons, gewinnt der Spieler, der gerade an der Reihe ist (da er stets so spielen kann, dass nach seinem Spielzug noch 0 oder 1 Bonbon übrig ist). Folglich verliert bei 5 oder 6 Bonbons der Spieler, der an der Reihe ist (da nach seinem Spielzug 2,3 oder 4 Bonbons übrig bleiben), so dass bei 7,8,9 Bonbons derjenige gewinnt, der an der Reihe ist (da er stets so spielen kann, dass

nach seinem Spielzug noch 5 oder 6 Bonbons übrig sind). Bei 10 Bonbons verliert schließlich derjenige, der an der Reihe ist (da nach seinem Spielzug 7 oder 8 Bonbons übrig bleiben), d.h. der Spieler, der als zweiter an der Reihe ist, kann stets beim Bonbon-Spiel gewinnen.

10. Ein sehr modernes Museum sehr moderner Kunst besteht aus zwei Stockwerken, nämlich einem Erdgeschoss und einem Stockwerk, welches sich direkt darüber befindet. Jedes Stockwerk besteht aus vier Fluren, welche in der Form eines Quadrates angeordnet sind, hierbei ist es möglich, von einem Flur in die beiden benachbarten Flure desselben Stockwerkes zu gehen. Am Ende eines jeden Flures gibt es eine Treppe, welche die beiden Stockwerke miteinander verbindet. Der einzige Eingang zum Museum ist gleichzeitig der einzige Ausgang und befindet sich in einer Ecke des Erdgeschosses. Du willst das Museum besichtigen, indem du jeden Flur genau einmal durchqueren willst (egal in welcher Richtung). Hierbei sind verschiedene Rundgänge möglich, je nachdem, in welcher Reihenfolge und in welcher Richtung du die Flure besuchst. Wie viele verschiedene Rundgänge sind hierbei insgesamt möglich, wenn du die Treppen höchstens zweimal nimmst?

    Richtige Antwort: 16
    Lösung: Du musst die gleiche Treppe zweimal nehmen. Du hast also 4 Treppen zur Wahl, und für jedes Stockwerk hast du 2 mögliche Richtungen in denen du es durchqueren kannst. Insgesamt gibt es also $4 \times 2 \times 2 = 16$ mögliche Rundgänge.

11. Du hast eine Münze, bei deren Wurf 'Kopf' mit höherer Wahrscheinlichkeit auftritt als Zahl'. Gemeinsam mit einem Freund spielst du das folgende Spiel: Die Münze wird zweimal geworfen. Wenn hierbei zweimal das gleiche Ergebnis rauskommt, gewinnst du, liefern beide Würfe jedoch unterschiedliche Ergebnisse, gewinnt dein Freund. Welcher Spieler hat eine höhere Wahrscheinlichkeit, das Spiel zu gewinnen? Antworte 1 für dich, 2 für deinen Freund oder 3, wenn beide Spieler dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, das Spiel zu gewinnen.

    Richtige Antwort: 1
    Lösung: Es sei h die Wahrscheinlickeit für 'Kopf' und $1 - h$ die Wahrscheinlichkeit für 'Zahl'. Das gleiche Ergebnis tritt mit der Wahrscheinlichkeit $h^2 + (1 - h)^2 = 1+2h^2-2h$ auf, während die Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedene Ergebnisse $2h(1-h) = 2h-2h^2$ ist. Die Differenz von beiden ist $(1+2h^2-2h)-(2h-2h^2) = 1-4h+4h^2 = (1-2h)^2$. Dies ist streng positiv, ausser im Fall $h = 1/2$, welcher jedoch ausgeschlossen ist. Folglich ist es wahrscheinlicher, dass die beiden Ergebnisse sich unterscheiden.

12. Die Nudeln einer speziellen Nudelsorte für Kinder haben die Form von Buchstaben, insgesamt gibt es 26 verschiedene Buchstaben. Wenn du 99 Nudeln dieser Sorte hast, welches ist dann die größte natürliche Zahl n, so dass du mit Sicherheit n Nudeln desselben Buchstaben hast?

Richtige Antwort: 4
Lösung: Bei 99 Nudeln müssen mindestens $ceiling(99/26) = 4$ Nudeln desselben Buchstabens dabei sein (Taubenschlagprinzip).