MathDay 2022 Junior

Aufgaben (16 Aufgaben Multiple-Choice)

1. Eine der drei Personen Anton, Bob und Charles ist ein Lügner, die beiden anderen sagen stets die Wahrheit.
   Anton sagt: Ich bin kein Lügner.
   Bob sagt: Anton ist kein Lügner.
   Charles sagt: Anton ist ein Lügner.
   Wer ist der Lügner?

   Richtige Antwort: Charles.
   Antworten: Anton, Bob, Charles.
   Lösung: Da die Aussagen von Bob und Charles sich gegenseitig widersprechen, muss einer von beiden der Lügner sein. Folglich lügt Anton nicht, so dass Charles letztlich der Lügner ist.

2. Bobs Großeltern mögen Rosen. An manchen Tagen wollen sie 3 weiße Rose, 2 rote Rosen und 1 gelbe Rose, an anderen Tagen sind es 1 weiße Rose, 2 rote Rosen und 3 gelbe Rosen. Bob ist im Blumenladen, hat jedoch vergessen, welche Rosen seine Großeltern an diesem Tag wollen. Er muss genügend Rosen kaufen damit die richtigen in jedem Fall darunter sind. (Es stehen einzelne Rosen jeder Farbe zum Verkauf, er kann also von jeder Farbe beliebig viele Rosen kaufen). Wie viele Rosen muss er insgesamt mindestens kaufen?

   Richtige Antwort: 8
   Antworten: 6, 8, 10, 12
   Lösung: Mit 3 weißen Rosen, 2 roten Rosen und 3 gelben Rosen kann Bob die Wünsche seiner Großeltern in jedem Fall erfüllen.

3. In einem Brettspiel gibt es verschiedene Richtungskarten, diese haben die Bezeichnungen Nord, Süd, West und Ost. Ein Spieler, der 3 Richtungskarten derselben Richtung hat, gewinnt das Spiel. Welches ist die kleinste Anzahl an Karten, die ein Spieler haben muss, um das Spiel mit Sicherheit zu gewinnen?

   Richtige Antwort: 9
   Antworten: 3, 6, 9, 12
   Lösung: Im ungünstigsten Fall hat der Spieler zwei Karten jeder Richtung, so dass 8 Karten nicht ausreichen. Bei 9 Karten kann er jedoch sicher sein, dass er von mindestens einer Richtung 3 Richtungskarten besitzt.

4. Vierzig Kinder haben eine Einladung zu einer Geburtstagsfeier erhalten, aber nicht alle sind gekommen. Auf der Feier werden verschiedene Spiele veranstaltet. Beim ersten Spiel werden Teams mit 8 Spielern gebildet, hierbei können alle Kinder in Teams aufgeteilt werden. Beim zweiten Spiel werden Teams mit 5 Spielern gebildet, hierbei gibt es zwei Kinder, die übrig bleiben und die Rolle des Schiedsrichters übernehmen. Wie viele Kinder nehmen insgesamt an der Geburtstagsfeier teil?

   Richtige Antwort: 32
   Antworten: 12, 20, 24, 32
   Lösung: Gesucht ist eine Zahl zwischen 0 und 40, die ein Vielfaches von 8 ist und deren Rest bei Division durch 5 gleich 2 ist. Die einzige Zahl, die dies erfüllt, ist 32.

5. Gegeben seien zwei identische Äpfel, eine Banane und eine Orange. Diese sollen unter vier Kindern (Alice, Bob, Charles und David) aufgeteilt werden, wobei jedes Kind genau eine Frucht bekommen soll. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die vier Früchte unter den vier Kindern aufzuteilen?

   Richtige Antwort: 12
   Antworten: 4, 6, 8, 12
   Lösung: Da die Äpfel identisch sind, reicht es, die Anzahl der Möglichkeiten die Banane und die Orange zu verteilen, zu bestimmen. Man hat 4 Möglichkeiten, die Banane zu verteilen, anschließend bleiben noch 3 Möglichkeiten, um die Orange zu verteilen. Insgesamt ergibt dies 12 Möglichkeiten.

6. Ein Bilderrahmen soll die Form eines Rechtecks haben, mit einem rechteckigen Loch in der Mitte. Um einen solchen Rahmen zu konstruieren, hat man 4 Holzstücke zur Verfügung, welche jeweils eine Breite von 10 cm haben. Zwei der Holzstücke haben eine Länge von 40 cm, die beiden anderen eine Länge von 60 cm. Durch Aneinanderkleben der Holzstücke können verschiedene Rahmen in Form eines Rechteckes hergestellt werden. Welches ist die größtmögliche Fläche, die das Loch in der Mitte des Rahmens hierbei haben kann? (Antwort in Quadratcentimetern)

   Richtige Antwort: 1600
   Antworten: 1000, 1200, 1500, 1600.
   Lösung: Man kann 3 verschiedene Rahmen bauen: einen 60cm$\times$60cm Rahmen mit einem 40cm$\times$ 40cm Loch (1600 Quadratcentimeter), einen 50cm$\times$70cm Rahmen mit einem 30cm$\times$ 50cm Loch (1500 Quadratcentimeter), oder einen 40cm$\times$ 80cm Rahmen mit einem 20cm$\times$ 60cm Loch (1200 Quadratcentimeter).

7. Du musst 200 mathematische Rätsel lösen. Glücklicherweise hilft ein Flaschengeist dir, indem er dir die folgenden drei Wünsche anbietet: Wunsch 1 löst 60% der ungelösten Rätsel, Wunsch 2 löst 40% der ungelösten Rätsel und Wunsch 3 löst 50 ungelöste Rätsel (oder alle restlichen ungelösten Rätsel, falls dies weniger

als 50 sind). Der Flaschengeist erfüllt dir 2 dieser Wünsche in beliebiger Reihenfolge. Welche Wünsche (und in welcher Reihenfolge) solltest du dir erfüllen lassen, um eine größtmögliche Anzahl an Rätseln zu lösen? (Beispiel: die Antwort (2,3) bedeutet, dass du zunächst den Wunsch 2 und anschließend den Wunsch 3 erfüllt haben willst)

Richtige Antwort: (1,3)
Antworten: (1,2), (2,1), (1,3), (3,1)
Lösung: Bei (1,2) und (2,1) bleiben 48 Rätsel ungelöst, während bei (1,3) 30 Rätsel ungelöst bleiben. Die Wünsche (3,1) lassen 60 Rätsel ungelöst. (Die Wünsche (2,3) bzw. (3,2) sind ungünstiger als (1,3) bzw. (3,1).)

8. Du fährst ein ferngesteuertes Auto auf einer Strecke, die die Form eines 10-seitigen regelmäßigen Polygons hat. Am Ende jeder geraden Teilstrecke drehst du das Fahrzeug nach links um einen Winkel, der zwischen 0 und 180 Grad misst, um auf die nächste gerade Teilstrecke zu kommen. Um welchen Winkel hast du das Fahrzeug insgesamt gedreht, nachdem du die gesamte Strecke einmal abgefahren bist, wobei du in der Mitte einer Seite des Polygons gestartet bist? (Antwort in Grad)

   Richtige Antwort: 360
   Antworten: 180, 360, 900, 1800.
   Lösung: Die Summe der Außenwinkel eines regelmäßigen Polygons beträgt $360°$.

9. In einem fremden Land gibt es die Währung AUR. Es gibt Geldstücke mit den Werten 1AUR, 3AUR und 9AUR. Wie viele Geldstücke benötigt man mindestens, um jeden Betrag zwischen 1AUR und 44AUR bezahlen zu können? Man kann jedes Geldstück beliebig oft wählen, aber man muss die Geldstücke wählen, bevor der zu zahlende Betrag bekannt ist.

   Richtige Antwort: 8
   Antworten: 7, 8, 9, 10
   Lösung: Man kann 4 x 9AUR, 2 x 3AUR und 2x 1AUR Münzen wählen. Dies ist optimal, da man mit höchstens 3 9AUR Münzen insgesamt mindestens 10 Geldstücke braucht, um den Betrag von 44AUR zu bezahlen (3 x 9AUR + 5 x 3AUR + 2 x 1AUR), und mit 4 9AUR Münzen benötigt man insgesamt mindestens 8 Geldstücke, um diesen Betrag zu bezahlen. Die gewählten Münzen erlauben es, jeden Betrag zwischen 1AUR und 44AUR zu bezahlen: aufgrund der 9AUR Münzen reicht es hierzu, jeden Betrag zwischen 1AUR und 8AUR bezahlen zu können, dies ist mit den jeweils 2 gewählten 3AUR und 1AUR Münzen möglich.

10. Alice und Zoe laufen, wenn sie alleine sind, beide mit ihren üblichen, konstanten Geschwindigkeiten. Alice läuft 1 Kilometer in 3:20 (3 Minuten und 20 Sekunden), während Zoe 1 Kilometer in 4:10 läuft. Die beiden wollten gemeinsam eine gerade, 9 Kilometer lange Strecke entlang eines Flusses ablaufen. Aufgrund eines

Missverständnisses befinden sich die beiden jedoch an den jeweils entgegengesetzten Enden der Strecke. Also beschließen sie, aufeinenader zuzulaufen. Nach welcher Zeit treffen die beiden aufeinander, wenn sie gleichzeitig starten?

Richtige Antwort: 16:40
Antworten: 12:30, 13:20, 16:40, 20:00
Lösung: Alice läuft 1km in 200 Sekunden, Zoe in 250 Sekunden. Alices Geschwindigkeit beträgt somit 5/4 von Zoes Geschwindigkeit. Folglich treffen beide aufeinander, nachdem Alice 5/9 der Gesamtstrecke zurückgelegt hat (und Zoe 4/9), d.h. nach 5km, wofür Alice 16:40 braucht.

11. Dir stehen 8 Stäbchen zur Verfügung, um ein geschlossenes Polygon zu konstruieren, dessen Seiten entweder horizontal oder vertikal sein müssen. Wenn jedes Stäbchen die Länge 1 hat, welches ist dann die größtmögliche Fläche, die das Polygon besitzen kann? (Antwort in Anzahl an Quadraten der Seitenlänge 1)

    Richtige Antwort: 4
    Antworten: 3, 4, 5, 6
    Lösung: Mit den Stäbchen kann man entweder ein 2×2 Quadrat der Fläche 4, ein 3×1 Rechteck der Fläche 3, oder eine L-förmige Figur der Fläche 3 konstruieren.

12. Man betrachte 2 faire Spielwürfel mit jeweils vier Seitenflächen, welche mit den Zahlen 1 bis 4 versehen sind. Der erste ist rot und der zweite ist blau, beide werden gleichzeitig geworfen, anschließend wird die Summe der beiden geworfenen Zahlen gebildet. Welches ist der wahrscheinlichste Wert dieser Summe?

    Richtige Antwort: 5
    Antworten: 4, 5, 6, 7
    Lösung: Man betrachte alle möglichen Ausgänge der beiden Würfe, dies ergibt 16 Zahlenpaare, die aus den Zahlen 1 bis 4 bestehen. Die Summen 2 und 8 ergeben sich hierbei nur bei jeweils einem Paar. Die Summen 3 und 7 ergeben sich für jeweils 2 Paare, während es für 4 und 6 jeweils 3 Möglichkeiten gibt. Die Summe 5 ist am wahrscheinlichsten, sie kann durch 4 Zahlenpaare erhalten werden ((1,4),(2,3),(3,2),(4,1)).

13. Du bist in einer Videokonferenz mit Freunden, welche die kombische Sprache sprechen. Du selbst kennst nur 4 Wörter dieser Sprache, nämlich Xix, Yiy, Ziz, Wiw. Genau eines dieser Wörter ist sehr lustig, leider weißt du nicht mehr, welches. Wenn du deinen Freunden eine Nachricht schreibst, werden sie sofort lachen, wenn das lustige Wort enthalten ist, andernfalls jedoch nicht. Du kannst jedem deiner Freunde genau eine Nachricht mit kombischen Wörtern schreiben, wobei du selbst entscheiden kannst, wie viele und welche Wörter die Nachricht jeweils enthalten soll. Alle Nachrichten werden gleichzeitig verschickt, anschließend kannst du beobachten, welche deiner Freunde über ihre Nachricht lachen. Wie viele Freunde müssen mindestens an der Videokonferenz teilnehmen, damit du

eindeutig anhand der oben beschriebenen Methode bestimmen kannst, welches der 4 Wörter das lustige Wort ist?

Richtige Antwort: 2
Antworten: 1, 2, 3, 4
Lösung: Ein Freund reicht nicht aus, da es mit einer einzigen Nachricht nicht möglich ist, das lustige Wort eindeutig zu bestimmen. Zwei Freunde reichen jedoch aus: an den ersten schickst du das erste und dritte Wort, an den zweiten das zweite und dritte Wort. Lacht nur der erste Freund, ist das erste Wort das lustige, lacht nur der Zweite, ist es das zweite Wort. Lachen beide, ist es das dritte, lacht niemand, ist es das vierte.

14. In einer Gruppe von Koalabären beträgt das Gewicht der beiden leichtesten Bären 25% des Gesamtgewichtes der Gruppe, während das Gewicht der drei schwersten Bären 60% des Gesamtgewichtes beträgt. Aus wie vielen Koalabären besteht die Gruppe?

    Richtige Antwort: 6
    Antworten: 5, 6, 7, 8
    Lösung: Es müssen mehr als 5 Koalas sein, da die 5 erwähnten Koalas nicht 100% des Gesamtgewichtes ausmachen. Jeder weitere Koala muss mindestens 12,5% und höchstens 20% des Gesamtgewichtes der Gruppe ausmachen. Da lediglich 15% des Gesamtgewichtes nicht durch die 5 erwähnten Koalas abgedeckt werden, muss es genau einen weiteren Koala geben. Die Gruppe besteht demnach aus 6 Bären.

15. Amy und Ben spielen das Bonbon-Spiel. Sie beginnen mit 10 Bonbons, anschließend sind die beiden abwechselnd an der Reihe, wobei jeder in seiner Runde 2 oder 3 Bonbons entfernt. Der erste Spieler, der nicht mehr spielen kann (weil weniger als 2 Bonbons übrig sind), hat verloren. Amy spielt zuerst. Wenn sowohl Ben als auch Amy jeweils die bestmögliche Strategie spielen, wer gewinnt dann das Spiel?

    Richtige Antwort: Ben
    Antworten: Amy, Ben
    Lösung: Sind 0 oder 1 Bonbon übrig, verliert der Spieler, der gerade an der Reihe ist. Bei 2,3,4 Bonbons, gewinnt der Spieler, der gerade an der Reihe ist (da er stets so spielen kann, dass nach seinem Spielzug noch 0 oder 1 Bonbon übrig ist). Folglich verliert bei 5 oder 6 Bonbons der Spieler, der an der Reihe ist (da nach seinem Spielzug 2,3 oder 4 Bonbons übrig bleiben), so dass bei 7,8,9 Bonbons derjenige gewinnt, der an der Reihe ist (da er stets so spielen kann, dass nach seinem Spielzug noch 5 oder 6 Bonbons übrig sind). Bei 10 Bonbons verliert schließlich derjenige, der an der Reihe ist (da nach seinem Spielzug 7 oder 8 Bonbons übrig bleiben), d.h. der Spieler, der als zweiter an der Reihe ist, kann stets beim Bonbon-Spiel gewinnen.

16. Man betrachte ein 4×4 Schachbrett, auf welchem Läufer platziert werden sollen. Wie viele Läufer können maximal platziert werden, so dass keine zwei Figuren in derselben diagonalen Linie stehen?

    Richtige Antwort: 6
    Antworten: 4, 5, 6, 7
    Lösung: Man kann Läufer auf den Feldern A1, A3, B1, C4, D1, D2 platzieren, ohne dass zwei Figuren in derselben diagonalen Linie stehen, d.h. die Antwort ist größer oder gleich 6. Es gibt insgesamt 7 diagonale Linien, d.h. die Antwort ist kleiner oder gleich 7. Allerdings befindet sich die 1. und 7. diagonale Linie in der einen Richtung, auf der 4. diagonalen Linie in der anderen Richtung, so dass die 1. und 7. diagonale Linie nicht gleichzeitig durch einen Läufer besetzt werden können. Folglich ist die Antwort 6.