MathDay 2022 Senior

Première partie (6 questions sans preuves)

1. Vous arrivez sur une île habitée par 7 nains. Un nain peut soit dire la vérité, soit être un menteur. Les diseurs de vérité disent toujours la vérité et les menteurs mentent toujours. Tous les nains font la queue en ligne droite pour vous accueillir. Ils regardent tous dans votre direction.
   Le premier nain de la file dit : "Tous les nains derrière moi sont des menteurs."
   Tous les autres nains disent : "Le nain juste devant moi est un menteur."
   Combien de nains mentent ?

   Réponse correcte : 4

   Solution : Les nains juste derrière les menteurs sont des diseurs de vérité, donc le premier nain doit être un menteur. Les nains juste derrière les diseurs de vérité sont des menteurs, donc les menteurs et les diseurs de vérité alternent, ce qui donne un total de 4 menteurs.

2. Vous avez un appel vidéo avec des amis qui sont des locuteurs natifs de la langue combi. Vous ne vous souvenez que de quatre mots différents dans la langue combi : Xix, Yiy, Ziz, Wiw. Précisément l'un d'entre eux est extrêmement drôle. Vous savez que si vous écrivez certains de ces mots à l'un de vos amis, votre ami se mettra immédiatement à rire si et seulement si le mot drôle fait partie des mots que vous avez choisis.
   Vous pouvez écrire exactement un message avec des mots combi à chacun de vos amis en ligne. Vous pouvez choisir le nombre de mots et quels mots écrire. Vous pouvez envoyer différents messages individuels, mais tous les messages sont envoyés en même temps. Ensuite, vous pouvez vérifier dans l'appel vidéo qui rit. Combien d'amis au minimum doivent être présents dans l'appel vidéo pour que vous puissiez déterminer le mot amusant avec la méthode ci-dessus dans tous les cas ?

   Réponse correcte : 2

   Solution : Un ami ne suffit pas car en testant un seul message, vous ne pouvez pas déterminer le mot drôle. Deux amis suffisent : vous envoyez le premier mot uniquement au premier ami, le deuxième mot uniquement au deuxième, le troisième mot aux deux et le quatrième mot à aucun d'eux.

3. Amy et Ben s'affrontent au Jeu des Bonbons. Au départ, il y a 10 bonbons. Amy et Ben jouent l'un après l'autre. Chaque joueur peut lors de son tour retirer 2 ou 3 bonbons. Le premier joueur qui ne peut pas jouer (car il reste moins de 2 bonbons) a perdu. Amy joue en premier. Si Amy et Ben souhaitent tous les deux gagner et

qu'ils adoptent la meilleure stratégie possible, qui gagne ? Répondez 1 pour Amy et répondez 2 pour Ben.

Réponse correcte : 2.

Solution : Considérons le nombre de bonbons restants. Avec 0 ou 1 bonbons on est perdant. Avec 2,3 ou 4 bonbons on est gagnant (pour 4 bonbons choisir de prendre 3 bonbons, pour 3 bonbons choisir de prendre 2 ou 3 bonbons, pour 2 bonbons choisir de prendre 2 bonbons). Avec 5 ou 6 bonbons, on est perdant (prendre 2 ou 3 bonbons place l'autre joueur dans une situation gagnante). Avec 7, 8 ou 9 bonbons, l'un est le gagnant (prendre 2 ou 3 bonbons place l'autre joueur dans une situation perdante). Avec 10 bonbons on est perdant (prendre 2 ou 3 bonbons place l'autre joueur dans une situation gagnante). Donc Ben gagne à coup sûr.

4. Un musée très moderne d'art très moderne a deux étages, l'un au-dessus de l'autre. Chaque étage se compose de quatre couloirs reliés et formant un carré. Il est possible de passer de chaque couloir aux deux voisins du même étage. Au bout de chaque couloir se trouve un escalier reliant verticalement les deux étages. La seule entrée est également la seule sortie et elle est située dans un coin du rez-de-chaussée. Vous voulez marcher le long de chaque couloir exactement une fois (la direction n'a pas d'importance pour vous). Vous pouvez effectuer différents circuits, selon l'ordre dans lequel vous visitez les couloirs. Combien y a-t-il de circuits différents, supposant que vous preniez l'escalier exactement deux fois ?

   Réponse correcte : 16

   Solution : Vous êtes obligés d'utiliser les mêmes escaliers deux fois. Donc vous avez 4 choix pour les escaliers et pour chaque étage, vous avez 2 choix pour la direction dans laquelle vous allez. Donc en total, vous avez $4 \times 2 \times 2 = 16$ différents circuits possibles.

5. Vous avez une pièce qui, lorsqu'elle est lancée, revient plus souvent face que pile. Vous et un ami jouez au jeu suivant : vous lancez la pièce deux fois. Si le résultat est deux fois le même, vous gagnez. Si les résultats des lancers sont différents, votre ami gagne. Qui est le plus susceptible de gagner ? Répondez 1 si vous avez une plus grande probabilité de gagner, répondez 2 si votre ami a une plus grande probabilité de gagner, répondez 3 si vous et votre ami avez la même probabilité de gagner.

   Réponse correcte : 1

   Solution : Soit h la probabilité de faire face et $1-h$ celle de faire pile. Obtenir deux fois le même résultat a pour probabilité $h^2+(1-h)^2 = 1+2h^2-2h$, alors qu'obtenir deux résultats différents a pour probabilité $2h(1-h) = 2h-2h^2$. La différence est donc $(1+2h^2-2h)-(2h-2h^2) = 1-4h+4h^2 = (1-2h)^2$. Cela est positif sauf lorsque $h = 1/2$, ce qui est exclus. Donc il est plus probable d'obtenir deux fois le même résultat que deux résultats différents.

6. Vous possédez un sac de pâtes en forme de lettres pour enfants. Il y a 26 lettres différentes. Si vous prenez 99 pâtes du sac, quel est le plus grand nombre entier

n tel que vous puissiez être sûr d'avoir au moins n pâtes représentant la même lettre ?

Réponse correcte : 4
Solution : C'est le principe des tiroirs. Avec 99 pâtes de 26 types différents, il y a au moins $\lceil 99/26 \rceil = 4$ pâtes du même type.

Seconde partie (3 problèmes avec preuves)

1. Prouver que la division euclidienne du carré d'un nombre entier naturel par 4 ne donne jamais pour reste 2 ou 3.
   Un nombre entier pair est divisible par 2, donc son carré est divisible par 4, et n'a donc jamais pour reste 0 après division euclidienne par 4. Un nombre impair est de la forme $n = 2t+1$, où t est un entier. Donc son carré égale $n^2 = (2t+1)^2 = 4t^2+4t+1 = 4(t^2+t)+1$. Ainsi, le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 sera égal à 1. Les restes possibles étant 0 ou 1, les restes 2 et 3 sont impossibles.
2. Soit $ABCD$ un rectangle de papier. En pliant la feuille en deux le long d'une ligne et en l'ouvrant à nouveau, cela fait apparaître une ligne de pliage sur le papier comme si on l'avait tracée.
   (a) Plions le papier en deux de sorte que A repose sur B et D repose sur C. Appelons L la ligne qui en résulte.
   (b) Plions le papier en deux de sorte que le segment BC repose sur L. Appelons L' la ligne qui en résulte.
   (c) Supposons que vous puissiez plier le papier en deux de sorte que A repose sur L' et que la ligne qui en résulte, notée L'', passe par D ainsi que par l'intersection de AB et de L.

   Quel est le ratio des longueurs entre le côté le plus court et celui le plus long du rectangle $ABCD$?
   Soient $|AB| = x$, $|BC| = y$. Soit M le milieu de A et B et soit N le milieu de M et B. Notons que L et L' sont parallèles à AD et BC et qu'elles passent par M et N respectivement.
   Soit P le point sur L' tel que $|AM| = |MP|$. On a $\tan(\measuredangle AMD) = \frac{y}{\frac{1}{2}x}$. Comme $\cos(\measuredangle NMP) = \frac{\frac{1}{4}x}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$, on en déduit $\measuredangle NMP = \frac{\pi}{3}$.
   Ainsi, $\measuredangle AMD = \frac{1}{2}\measuredangle AMP = \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$. Ceci implique que $\frac{x}{y} = \frac{2}{\tan(\measuredangle AMD)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
3. (a) Soit a un nombre réel strictement positif. Montrez que
   $$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$
   (b) Soient x, y, z des nombres réels positifs tels que :
   $$\begin{cases} a = x + y - z > 0 \\ b = x - y + z > 0 \\ c = -x + y + z > 0. \end{cases}$$
   Prouvez l'inégalité suivante :
   $$x + y + z - \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz}{(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)} \geqslant 6\,.$$

Observons que $a+b+c=x+y+z$ et que

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz=-ab-ac-bc\,.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
&x+y+z-\frac{x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz}{(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)}\\
&=a+b+c+\frac{ab+ac+bc}{abc}\\
&=a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}\\
&\geq 2+2+2=6.
\end{aligned}$$