MathDay 2022 Senior

Erster Teil (6 Aufgaben ohne Beweis)

1. Du befindest dich auf einer Insel, die von 7 Zwergen bewohnt wird. Hierbei gibt es Zwerge, die stets lügen, während andere stets die Wahrheit sagen. Alle Zwerge stellen sich in einer Reihe vor dir auf und blicken in deine Richtung.
   Der erste Zwerg in der Reihe sagt: 'Alle Zwerge hinter mir sind Lügner.'
   Alle anderen Zwerge sagen: 'Der Zwerg direkt vor mir ist ein Lügner.'
   Wie viele Lügner gibt es insgesamt unter den 7 Zwergen?

   Richtige Antwort: 4
   Lösung: Zwerge, welche direkt hinter Lügnern stehen, sagen die Wahrheit, folglich muss der erste Zwerg ein Lügner sein. Zwerge, die direkt hinter einem Zwerg stehen, welcher die Wahrheit sagt, sind Lügner. Insgesamt folgt, dass Zwerge die lügen und solche, die die Wahrheit sagen, abwechselnd in der Reihe vorkommen, so dass es dann insgesamt 4 Lügner gibt.

2. Du bist in einer Videokonferenz mit Freunden, welche die kombische Sprache sprechen. Du selbst kennst nur 4 Wörter dieser Sprache, nämlich Xix, Yiy, Ziz, Wiw. Genau eines dieser Wörter ist sehr lustig, leider weißt du nicht mehr, welches. Wenn du deinen Freunden eine Nachricht schreibst, werden sie sofort lachen, wenn das lustige Wort enthalten ist, andernfalls jedoch nicht. Du kannst jedem deiner Freunde genau eine Nachricht mit kombischen Wörtern schreiben, wobei du selbst entscheiden kannst, wie viele und welche Wörter die Nachricht jeweils enthalten soll. Alle Nachrichten werden gleichzeitig verschickt, anschließend kannst du beobachten, welche deiner Freunde über ihre Nachricht lachen. Wie viele Freunde müssen mindestens an der Videokonferenz teilnehmen, damit du eindeutig anhand der oben beschriebenen Methode bestimmen kannst, welches der 4 Wörter das lustige Wort ist?

   Richtige Antwort: 2
   Lösung: Ein Freund reicht nicht aus, da es mit einer einzigen Nachricht nicht möglich ist, das lustige Wort eindeutig zu bestimmen. Zwei Freunde reichen jedoch aus: an den ersten schickst du das erste und dritte Wort, an den zweiten das zweite und dritte Wort. Lacht nur der erste Freund, ist das erste Wort das lustige, lacht nur der Zweite, ist es das zweite Wort. Lachen beide, ist es das dritte, lacht niemand, ist es das vierte.

3. Amy und Ben spielen das Bonbon-Spiel. Sie beginnen mit 10 Bonbons, anschließend sind die beiden abwechselnd an der Reihe, wobei jeder in seiner Runde 2

oder 3 Bonbons entfernt. Der erste Spieler, der nicht mehr spielen kann (weil weniger als 2 Bonbons übrig sind), hat verloren. Amy spielt zuerst. Wenn sowohl Ben als auch Amy jeweils die bestmögliche Strategie spielen, wer gewinnt dann das Spiel? (Antworte 1 für Amy und 2 für Ben)

Richtige Antwort: 2.
Lösung: Sind 0 oder 1 Bonbon übrig, verliert der Spieler, der gerade an der Reihe ist. Bei 2,3,4 Bonbons, gewinnt der Spieler, der gerade an der Reihe ist (da er stets so spielen kann, dass nach seinem Spielzug noch 0 oder 1 Bonbon übrig ist). Folglich verliert bei 5 oder 6 Bonbons der Spieler, der an der Reihe ist (da nach seinem Spielzug 2,3 oder 4 Bonbons übrig bleiben), so dass bei 7,8,9 Bonbons derjenige gewinnt, der an der Reihe ist (da er stets so spielen kann, dass nach seinem Spielzug noch 5 oder 6 Bonbons übrig sind). Bei 10 Bonbons verliert schließlich derjenige, der an der Reihe ist (da nach seinem Spielzug 7 oder 8 Bonbons übrig bleiben), d.h. der Spieler, der als zweiter an der Reihe ist, kann stets beim Bonbon-Spiel gewinnen.

4. Ein sehr modernes Museum sehr moderner Kunst besteht aus zwei Stockwerken, nämlich einem Erdgeschoss und einem Stockwerk, welches sich direkt darüber befindet. Jedes Stockwerk besteht aus vier Fluren, welche in der Form eines Quadrates angeordnet sind, hierbei ist es möglich, von einem Flur in die beiden benachbarten Flure desselben Stockwerkes zu gehen. Am Ende eines jeden Flures gibt es eine Treppe, welche die beiden Stockwerke miteinander verbindet. Der einzige Eingang zum Museum ist gleichzeitig der einzige Ausgang und befindet sich in einer Ecke des Erdgeschosses. Du willst das Museum besichtigen, indem du jeden Flur genau einmal durchqueren willst (egal in welcher Richtung). Hierbei sind verschiedene Rundgänge möglich, je nachdem, in welcher Reihenfolge und in welcher Richtung du die Flure besuchst. Wie viele verschiedene Rundgänge sind hierbei insgesamt möglich, wenn du die Treppen höchstens zweimal nimmst?

   Richtige Antwort: 16
   Lösung: Du musst die gleiche Treppe zweimal nehmen. Du hast also 4 Treppen zur Wahl, und für jedes Stockwerk hast du 2 mögliche Richtungen in denen du es durchqueren kannst. Insgesamt gibt es also $4 \times 2 \times 2 = 16$ mögliche Rundgänge.

5. Du hast eine Münze, bei deren Wurf 'Kopf' mit höherer Wahrscheinlichkeit auftritt als 'Zahl'. Gemeinsam mit einem Freund spielst du das folgende Spiel: Die Münze wird zweimal geworfen. Wenn hierbei zweimal das gleiche Ergebnis rauskommt, gewinnst du, liefern beide Würfe jedoch unterschiedliche Ergebnisse, gewinnt dein Freund. Welcher Spieler hat eine höhere Wahrscheinlichkeit, das Spiel zu gewinnen? Antworte 1 für dich, 2 für deinen Freund oder 3, wenn beide Spieler dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, das Spiel zu gewinnen.

   Richtige Antwort: 1
   Lösung: Es sei h die Wahrscheinlickeit für 'Kopf' und $1 - h$ die Wahrscheinlichkeit

für ‘Zahl’. Das gleiche Ergebnis tritt mit der Wahrscheinlichkeit $h^2 + (1 - h)^2 = 1 + 2h^2 - 2h$ auf, während die Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedene Ergebnisse $2h(1-h) = 2h - 2h^2$ ist. Die Differenz von beiden ist $(1+2h^2-2h)-(2h-2h^2) = 1 - 4h + 4h^2 = (1-2h)^2$. Dies ist streng positiv, ausser im Fall $h = 1/2$, welcher jedoch ausgeschlossen ist. Folglich ist es wahrscheinlicher, dass die beiden Ergebnisse sich unterscheiden.

6. Die Nudeln einer speziellen Nudelsorte für Kinder haben die Form von Buchstaben, insgesamt gibt es 26 verschiedene Buchstaben. Wenn du 99 Nudeln dieser Sorte hast, welches ist dann die größte natürliche Zahl n, so dass du mit Sicherheit n Nudeln desselben Buchstaben hast?

   Richtige Antwort: 4
   Lösung: Bei 99 Nudeln müssen mindestens $ceiling(99/26) = 4$ Nudeln desselben Buchstabens dabei sein (Taubenschlagprinzip).

Zweiter Teil (3 Aufgaben mit Beweis)

1. Beweise, dass das Quadrat einer natürlichen Zahl nie den Rest 2 oder 3 bei Division durch 4 hat.

   Eine gerade Zahl ist durch 2 teilbar, so dass ihr Quadrat durch 4 teilbar ist (d.h. der Rest ist dann 0). Eine ungerade natürliche Zahl n hat die Form $n = 2t + 1$, wobei t eine natürlich Zahl ist. Folglich ist das Quadrat gleich $n^2 = (2t+1)^2 = 4t^2+4t+1 = 4(t^2 + t) + 1$, so dass der Rest nach Division durch 4 gleich 1 ist. Insgesamt ergibt sich, dass die Reste 2 und 3 nie vorkommen können.

2. Es sei $ABCD$ ein Rechteck aus Papier. Wenn du das Papier entlang einer Linie faltest, und es wieder öffnest, wird die Faltlinie sichtbar, so als hätte man sie auf das Papier gezeichnet.

   (a) Falte das Papier, so dass A auf B liegt und D auf C liegt.
   Man bezeichne die dadurch entstandene Faltlinie mit L.

   (b) Falte das Papier, so dass das Segment BC auf L liegt.
   Man bezeichne die dadurch entstandene Faltlinie mit L'.

   (c) Man nehme an, dass man das Papier so falten kann, dass A auf L' liegt und so, dass die dadurch entstandene Faltlinie, welche wir mit L'' bezeichnen, durch D und den Schnittpunkt von AB und L verläuft.

   Welches ist das Verhältnis zwischen der längsten und kürzesten Seite des Rechtecks $ABCD$?

   Es sei $|AB| = x$ und $|BC| = y$. Sei M der Mittelpunkt von AB und N der Mittelpunkt von MB. Beachte, dass L und L' parallel zu AD und BC sind, und durch M bzw. N verlaufen. Es sei nun P der Punkt auf L', so dass $|AM| = |MP|$ gilt. Dann gilt $\tan(\measuredangle AMD) = \frac{y}{\frac{1}{2}x}$. Aus $\cos(\measuredangle NMP) = \frac{\frac{1}{4}x}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$ folgern wir $\measuredangle NMP = \frac{\pi}{3}$.
   Also gilt $\measuredangle AMD = \frac{1}{2}\measuredangle AMP = \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$, woraus $\frac{x}{y} = \frac{2}{\tan(\measuredangle AMD)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ folgt.

3. (a) Es sei a eine streng positive reelle Zahl. Beweise dass

   $$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

   (b) Es seien x, y, z streng positive reelle Zahlen, so dass

   $$\begin{cases} a = x + y - z > 0 \\ b = x - y + z > 0 \\ c = -x + y + z > 0. \end{cases}$$

   Beweise die folgende Ungleichung:

   $$x + y + z - \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz}{(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z)} \geqslant 6\,.$$

Es gilt $a+b+c=x+y+z$, sowie

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz=-ab-ac-bc\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
&x+y+z-\frac{x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz}{(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)}\\
&=a+b+c+\frac{ab+ac+bc}{abc}\\
&=a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}\\
&\geq 2+2+2=6.
\end{aligned}$$