MathDay 2022 Senior

Erster Teil (6 Aufgaben ohne Beweis)

Jede Aufgabe ist 3 Punkte wert. Die korrekte Antwort gibt 3 Punkte, die falsche Antwort 0 Punkte und nicht antworten bringt 1 Punkt.

1. Du befindest dich auf einer Insel, die von 7 Zwergen bewohnt wird. Hierbei gibt es Zwerge, die stets lügen, während andere stets die Wahrheit sagen. Alle Zwerge stellen sich in einer Reihe vor dir auf und blicken in deine Richtung.
   Der erste Zwerg in der Reihe sagt: 'Alle Zwerge hinter mir sind Lügner.'
   Alle anderen Zwerge sagen: 'Der Zwerg direkt vor mir ist ein Lügner.'
   Wie viele Lügner gibt es insgesamt unter den 7 Zwergen?

2. Du bist in einer Videokonferenz mit Freunden, welche die kombische Sprache sprechen. Du selbst kennst nur 4 Wörter dieser Sprache, nämlich Xix, Yiy, Ziz, Wiw. Genau eines dieser Wörter ist sehr lustig, leider weißt du nicht mehr, welches. Wenn du deinen Freunden eine Nachricht schreibst, werden sie sofort lachen, wenn das lustige Wort enthalten ist, andernfalls jedoch nicht. Du kannst jedem deiner Freunde genau eine Nachricht mit kombischen Wörtern schreiben, wobei du selbst entscheiden kannst, wie viele und welche Wörter die Nachricht jeweils enthalten soll. Alle Nachrichten werden gleichzeitig verschickt, anschließend kannst du beobachten, welche deiner Freunde über ihre Nachricht lachen. Wie viele Freunde müssen mindestens an der Videokonferenz teilnehmen, damit du eindeutig anhand der oben beschriebenen Methode bestimmen kannst, welches der 4 Wörter das lustige Wort ist?

3. Amy und Ben spielen das Bonbon-Spiel. Sie beginnen mit 10 Bonbons, anschließend sind die beiden abwechselnd an der Reihe, wobei jeder in seiner Runde 2 oder 3 Bonbons entfernt. Der erste Spieler, der nicht mehr spielen kann (weil weniger als 2 Bonbons übrig sind), hat verloren. Amy spielt zuerst. Wenn sowohl Ben als auch Amy jeweils die bestmögliche Strategie spielen, wer gewinnt dann das Spiel? (Antworte 1 für Amy und 2 für Ben)

4. Ein sehr modernes Museum sehr moderner Kunst besteht aus zwei Stockwerken, nämlich einem Erdgeschoss und einem Stockwerk, welches sich direkt darüber befindet. Jedes Stockwerk besteht aus vier Fluren, welche in der Form eines Quadrates angeordnet sind, hierbei ist es möglich, von einem Flur in die beiden

benachbarten Flure desselben Stockwerkes zu gehen. Am Ende eines jeden Flures gibt es eine Treppe, welche die beiden Stockwerke miteinander verbindet. Der einzige Eingang zum Museum ist gleichzeitig der einzige Ausgang und befindet sich in einer Ecke des Erdgeschosses. Du willst das Museum besichtigen, indem du jeden Flur genau einmal durchqueren willst (egal in welcher Richtung). Hierbei sind verschiedene Rundgänge möglich, je nachdem, in welcher Reihenfolge und in welcher Richtung du die Flure besuchst. Wie viele verschiedene Rundgänge sind hierbei insgesamt möglich, wenn du die Treppen höchstens zweimal nimmst?

5. Du hast eine Münze, bei deren Wurf 'Kopf' mit höherer Wahrscheinlichkeit auftritt als 'Zahl'. Gemeinsam mit einem Freund spielst du das folgende Spiel: Die Münze wird zweimal geworfen. Wenn hierbei zweimal das gleiche Ergebnis rauskommt, gewinnst du, liefern beide Würfe jedoch unterschiedliche Ergebnisse, gewinnt dein Freund. Welcher Spieler hat eine höhere Wahrscheinlichkeit, das Spiel zu gewinnen? Antworte 1 für dich, 2 für deinen Freund oder 3, wenn beide Spieler dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, das Spiel zu gewinnen.

6. Die Nudeln einer speziellen Nudelsorte für Kinder haben die Form von Buchstaben, insgesamt gibt es 26 verschiedene Buchstaben. Wenn du 99 Nudeln dieser Sorte hast, welches ist dann die größte natürliche Zahl n, so dass du mit Sicherheit n Nudeln desselben Buchstaben hast?

Zweiter Teil (3 Aufgaben mit Beweis)

1. (3 Punkte) Beweise, dass das Quadrat einer natürlichen Zahl nie den Rest 2 oder 3 bei Division durch 4 hat.

2. (6 Punkte) Es sei $ABCD$ ein Rechteck aus Papier. Wenn du das Papier entlang einer Linie faltest, und es wieder öffnest, wird die Faltlinie sichtbar, so als hätte man sie auf das Papier gezeichnet.

   (a) Falte das Papier, so dass A auf B liegt und D auf C liegt.
   Man bezeichne die dadurch entstandene Faltlinie mit L.

   (b) Falte das Papier, so dass das Segment BC auf L liegt.
   Man bezeichne die dadurch entstandene Faltlinie mit L'.

   (c) Man nehme an, dass man das Papier so falten kann, dass A auf L' liegt und so, dass die dadurch entstandene Faltlinie, welche wir mit L'' bezeichnen, durch D und den Schnittpunkt von AB und L verläuft.

   Welches ist das Verhältnis zwischen der längsten und kürzesten Seite des Rechtecks $ABCD$?

3. (6 Punkte) (a) Es sei a eine streng positive reelle Zahl. Beweise dass

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

   (b) Es seien x, y, z streng positive reelle Zahlen, so dass

$$\begin{cases} a = x + y - z > 0 \\ b = x - y + z > 0 \\ c = -x + y + z > 0. \end{cases}$$

   Beweise die folgende Ungleichung:

$$x + y + z - \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz}{(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z)} \geqslant 6\,.$$