D'Euclide à la forme de l'univers

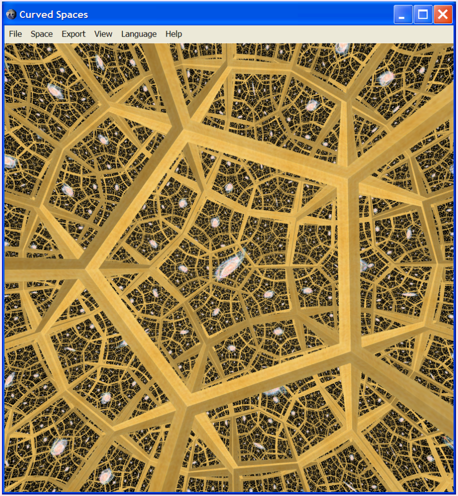
Beauté et richesse de la géométrie hyperbolique

Jean-Marc Schlenker

Université du Luxembourg

Ecole Leonoardo 2016

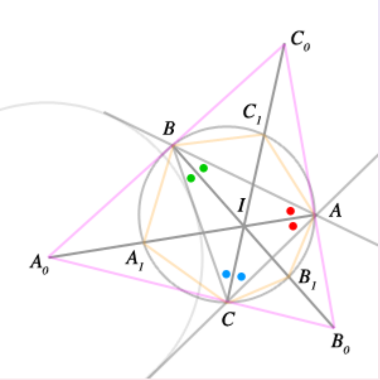
Une question : quelle est la forme de l'univers ?

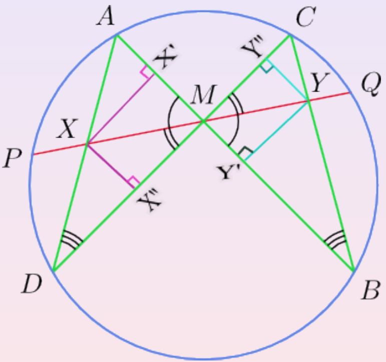


Images : Nature / Jeff Weeks.

La géométrie d'Euclide

La géométrie euclidienne





La géométrie d'Euclide étudie les relations entre les points, droites et cercles dans le plan, et leurs analogues dans l'espace.

Une vision rigoureuse des mathématiques

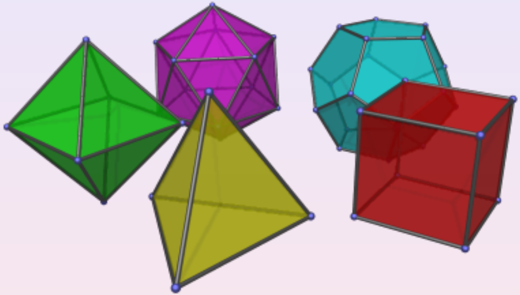
Les cinq postulats d'Euclide :

1. Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques.
2. Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
3. Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
4. Tous les angles droits sont congruents.
5. Si deux lignes droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.

Forme équivalente :

5'. Par un point extérieur à une droite donnée, ne passe qu'une unique droite qui lui est parallèle

Le résultat final d'Euclide



Résultat final des *Eléments* d'Euclide (livre XIII) : la classification des solides réguliers.
La physique de Platon (*Timée*) : Terre/cube, Air/octaèdre, Eau/icosaèdre, Feu/tétraèdre.
Dodécaèdre : le "cinquième élément", correspond à "l'univers dans son ensemble".

Le cinquième postulat est-il nécessaire ?

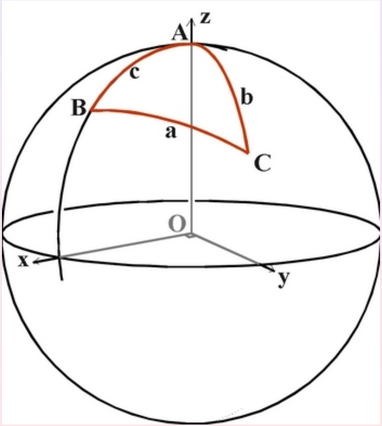
Question : le 5ème postulat est-il une conséquence des autres ?
Euclide s'était probablement posé la question.
De très nombreux mathématiciens ont essayé de *démontrer* cet énoncé à partir des autres postulats, et en ont trouvé des formes équivalentes. Par exemple

5". La somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits.

La réponse n'a été trouvée que vers 1850.

La géométrie de la sphère

Sur la sphère on a des points, des “droites” et des “cercles”. Ils forment une “géométrie”, mais pas au sens d'Euclide (2ème axiome) : les droites ne sont pas prolongeables à l'infini.



L'espace de Minkowski

On peut remplacer l'espace Euclidien de dimension trois, où

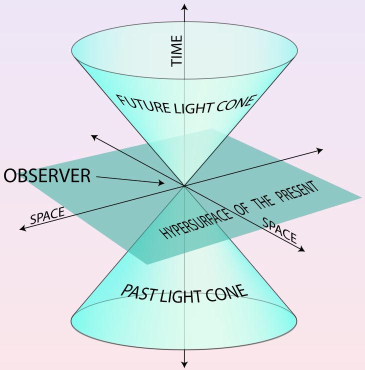
$$d((x,y,z),(x',y',z')) =$$

$$\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}\ .$$

par l'espace de Minkowski de la relativité restreinte.

$$d((x,y,t),(x',y',t')) =$$

$$\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2-(t'-t)^2}\ .$$

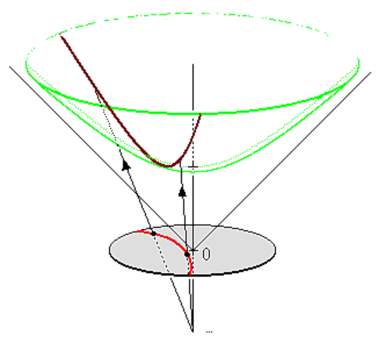


Le plan hyperbolique, analogue de la sphère

Le plan hyperbolique :

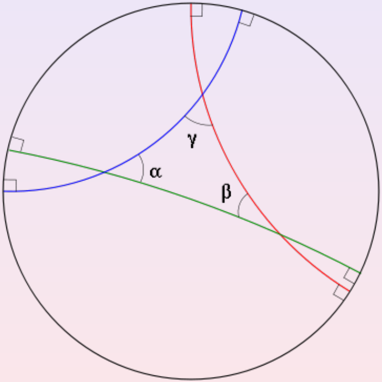
$$H^2 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-t^2 = -1\} .$$

C'est un analogue de la sphère.
Il satisfait tous les postulats d'Euclide sauf le 5ème !
Donc, ce 5ème postulat est bien nécessaire.



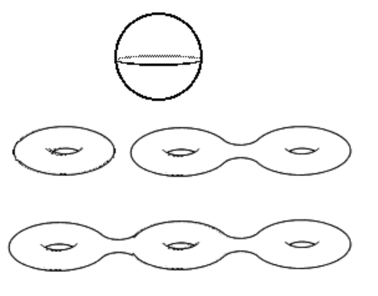
Le disque de Poincaré

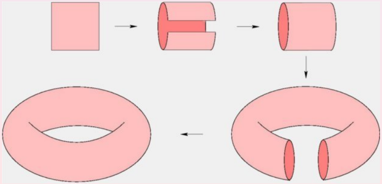
Le modèle du disque de Poincaré permet de comprendre la géométrie du plan hyperbolique.
Les lignes (hyperboliques) correspondent aux arcs de cercle orthogonaux au bord.



La classification des surfaces

Les surfaces (fermées) sont classifiées par un nombre entier, leur "genre".
Le tore (genre 1) porte une géométrie plate.
Toutes les surfaces de genre supérieur portent une métrique hyperbolique.





L'analogue des surfaces en dimension plus grande

Les "surfaces" de dimension plus grande sont appelées "variétés". En dimension trois, on a un phénomène analogue à celui qu'on a vu pour les surfaces.

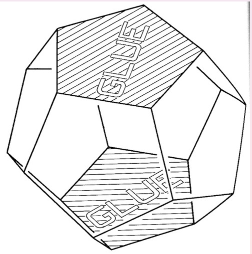
Théorème (Conj. d'uniformisation, Thurston 1970 – Perelman, 2002)

Chaque variété de dimension 3 peut être décomposée en un nombre fini de morceaux "irréductibles", et chacun de ces morceaux porte une parmi 8 géométries possibles.

Parmi ces géométries : euclidienne, sphérique, et surtout hyperbolique (la plus commune).

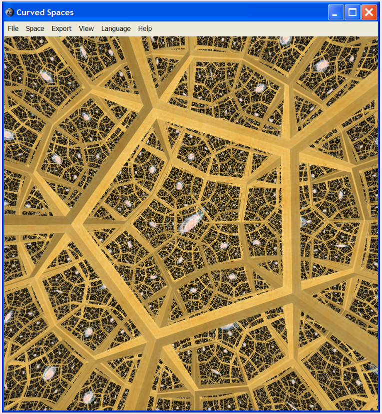
Variétés dodécaèdrales

On peut construire des variétés hyperboliques ou sphériques de dimension 3 par recollement des cotés d'un dodécaèdre (Poincaré). On obtient des variétés relativement simples.



Une question essentielle

Quelle est la forme de l'univers ? Est-ce qu'il est (à très grande échelle) sphérique, hyperbolique ou euclidien ?
La réponse dépend du signe de la *constante cosmologique*.
Certains résultats indiquent que l'univers pourrait être une variété dodécaèdrale.



Merci pour votre attention

C'est terminé !
Questions ? ?