Ordre et désordre dans les empilements optimaux de boules

Des questions élémentaires peuvent se révéler profondes

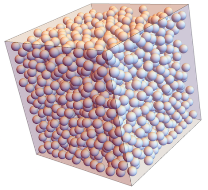
Jean-Marc Schlenker

Université du Luxembourg

Ecole Leonardo 2017

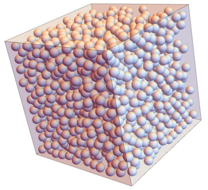
Comment “bien” empiler des disques ?

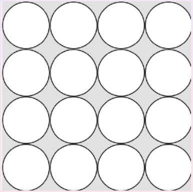
On voudrait empiler le plus possible de disques de même rayon dans un très grand cadre – quand la taille du cadre tend vers l'infini, on cherche à empiler des disques dans le plan.



Comment “bien” empiler des disques ?

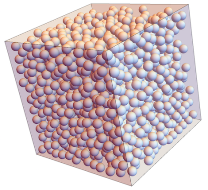
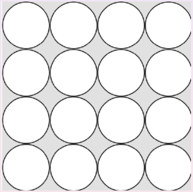
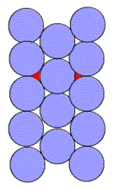
On voudrait empiler le plus possible de disques de même rayon dans un très grand cadre – quand la taille du cadre tend vers l'infini, on cherche à empiler des disques dans le plan.





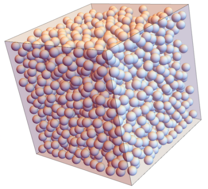
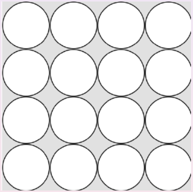
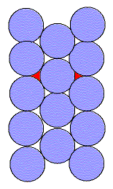
Comment “bien” empiler des disques ?

On voudrait empiler le plus possible de disques de même rayon dans un très grand cadre – quand la taille du cadre tend vers l'infini, on cherche à empiler des disques dans le plan.

Comment “bien” empiler des disques ?

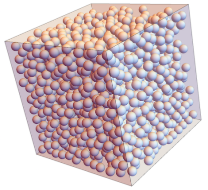
On voudrait empiler le plus possible de disques de même rayon dans un très grand cadre – quand la taille du cadre tend vers l'infini, on cherche à empiler des disques dans le plan.

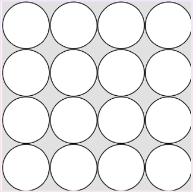




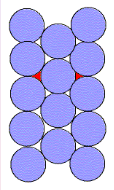
Réseau “carré” : densité 78,54%, “hexagonal” : 90,69%

Comment “bien” empiler des disques ?

On voudrait empiler le plus possible de disques de même rayon dans un très grand cadre – quand la taille du cadre tend vers l'infini, on cherche à empiler des disques dans le plan.







Réseau “carré” : densité 78,54%, “hexagonal” : 90,69%

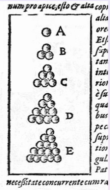
On sait depuis 1940 que l'empilement hexagonal est *optimal*, il n'en existe pas de plus dense.

Comment empiler des oranges ?

Comment empiler des oranges ?


Quel est l’empilement le plus dense ?

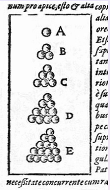
Comment empiler des oranges ?



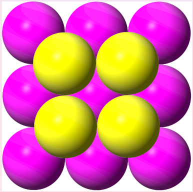
Quel est l’empilement le plus dense ? C’est le “problème de Kepler”, d’après Johannes Kepler (1571–1630).

Comment empiler des oranges ?



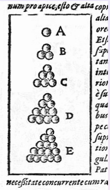



Quel est l’empilement le plus dense ? C’est le “problème de Kepler”, d’après Johannes Kepler (1571–1630).

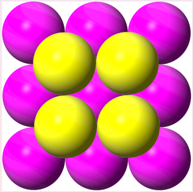
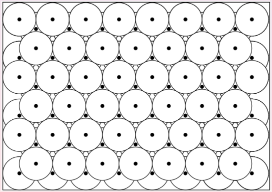


Comment empiler des oranges ?



Quel est l'empilement le plus dense ? C'est le "problème de Kepler", d'après Johannes Kepler (1571–1630).

Kepler avait conjecturé que l'empilement optimal est obtenu en superposant des empilements hexagonaux dans le plan.

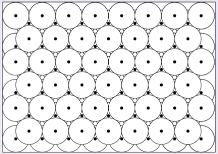
La solution du problème de Kepler

Le problème de Kepler a occupé les mathématiciens pendant des siècles. Il a finalement été résolu par Thomas Hales (né en 1958) en 1998.

La solution du problème de Kepler

Le problème de Kepler a occupé les mathématiciens pendant des siècles.
Il a finalement été résolu par Thomas Hales (né en 1958) en 1998.
Pourquoi le problème de Kepler est-il si difficile ?

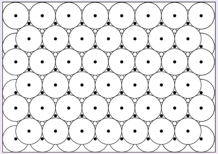
La solution du problème de Kepler

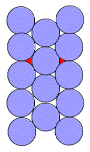


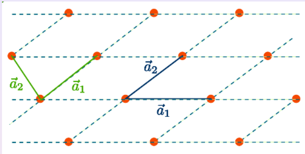
Le problème de Kepler a occupé les mathématiciens pendant des siècles. Il a finalement été résolu par Thomas Hales (né en 1958) en 1998.

Pourquoi le problème de Kepler est-il si difficile ? Les solutions ne sont pas aussi régulières qu'il n'y paraît !

La solution du problème de Kepler

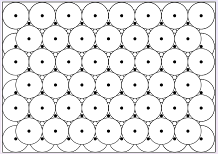
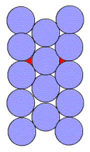
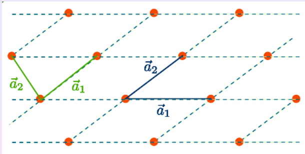






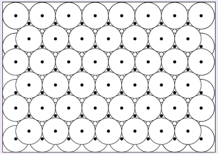
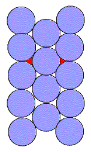
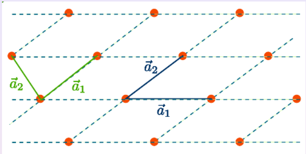
Le problème de Kepler a occupé les mathématiciens pendant des siècles. Il a finalement été résolu par Thomas Hales (né en 1958) en 1998. Pourquoi le problème de Kepler est-il si difficile ? Les solutions ne sont pas aussi régulières qu'il n'y paraît ! Il y a une infinité d'empilement optimaux, et la plupart ne sont pas des *réseaux* – ils sont beaucoup moins ordonnés qu'il n'y paraît !

La solution du problème de Kepler

Le problème de Kepler a occupé les mathématiciens pendant des siècles. Il a finalement été résolu par Thomas Hales (né en 1958) en 1998. Pourquoi le problème de Kepler est-il si difficile ? Les solutions ne sont pas aussi régulières qu’il n’y paraît ! Il y a une infinité d’empilement optimaux, et la plupart ne sont pas des *réseaux* – ils sont beaucoup moins ordonnés qu’il n’y paraît !
La preuve de Hales publiée en 2005, était si complexe qu’elle ne pouvait pas être vérifiée directement, et nécessitait l’utilisation d’ordinateurs pour examiner un grand nombre de cas.

La solution du problème de Kepler

Le problème de Kepler a occupé les mathématiciens pendant des siècles. Il a finalement été résolu par Thomas Hales (né en 1958) en 1998.

Pourquoi le problème de Kepler est-il si difficile ? Les solutions ne sont pas aussi régulières qu'il n'y paraît ! Il y a une infinité d'empilement optimaux, et la plupart ne sont pas des *réseaux* – ils sont beaucoup moins ordonnés qu'il n'y paraît !

La preuve de Hales publiée en 2005, était si complexe qu'elle ne pouvait pas être vérifiée directement, et nécessitait l'utilisation d'ordinateurs pour examiner un grand nombre de cas.

Hales des collaborateurs viennent de publier une preuve *formelle*, avec des démonstrations automatiques. Tout doute est donc levé.

Et en dimension plus grande ?

On peut se poser la même question en dimension plus grande, les boules sont remplacées par leurs analogues :

$$B^d = \{(x_1, x_2, \cdots, x_d) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 \le 1\} \ .$$

Quels sont les empilements de boules optimaux ? ?

Et en dimension plus grande ?

On peut se poser la même question en dimension plus grande, les boules sont remplacées par leurs analogues :

$$B^d = \{(x_1, x_2, \cdots, x_d) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 \leq 1\} .$$

Quels sont les empilements de boules optimaux ? ?

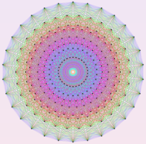
Cette année (2017), Marina Viazovska a publié la réponse en dimension 8.

Et en dimension plus grande ?

On peut se poser la même question en dimension plus grande, les boules sont remplacées par leurs analogues :

$$B^d = \{(x_1, x_2, \cdots, x_d) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 \leq 1\} .$$

Quels sont les empilements de boules optimaux ? ?



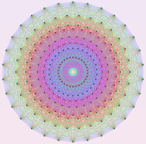
Cette année (2017), Marina Viazovska a publié la réponse en dimension 8. Cet empilement est construit sur un réseau particulier, appelé $E8$. Il est *très ordonné.*

Et en dimension plus grande ?

On peut se poser la même question en dimension plus grande, les boules sont remplacées par leurs analogues :

$$B^d = \{(x_1, x_2, \cdots, x_d) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 \leq 1\} \ .$$

Quels sont les empilements de boules optimaux ? ?



Cette année (2017), Marina Viazovska a publié la réponse en dimension 8. Cet empilement est construit sur un réseau particulier, appelé $E8$. Il est *très ordonné.*

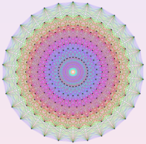
Puis elle et ses collaborateurs ont résolu le problème en dimension 24 : là aussi l'empilement optimal est basé sur le réseau de Leech, donc *très ordonné*.

Et en dimension plus grande ?

On peut se poser la même question en dimension plus grande, les boules sont remplacées par leurs analogues :

$$B^d = \{(x_1, x_2, \cdots, x_d) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 \leq 1\} .$$

Quels sont les empilements de boules optimaux ? ?

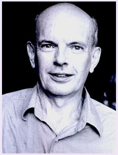
Cette année (2017), Marina Viazovska a publié la réponse en dimension 8. Cet empilement est construit sur un réseau particulier, appelé $E8$. Il est *très ordonné.*

Puis elle et ses collaborateurs ont résolu le problème en dimension 24 : là aussi l'empilement optimal est basé sur le réseau de Leech, donc *très ordonné*. Dans d'autres dimensions (toutes ?), de tels empilement optimaux ordonnés n'existent pas !

Mais au fait à quoi ça sert ?

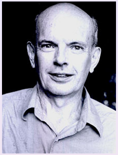
Les mathématiciens s’intéressent aux empilements de sphères depuis Kepler, mais les applications sont arrivées assez récemment.

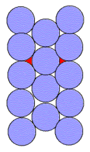
Mais au fait à quoi ça sert ?



Les mathématiciens s'intéressent aux empilements de sphères depuis Kepler, mais les applications sont arrivées assez récemment. Les principales applications sont dans la théorie du *codage* : comment transmettre sans erreur un message numérique. Neil Sloane (1939–), des Bell Labs, en est le principal spécialiste.

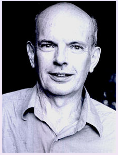
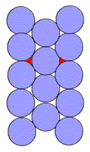
Mais au fait à quoi ça sert ?





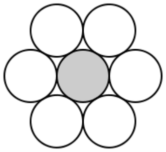
Les mathématiciens s’intéressent aux empilements de sphères depuis Kepler, mais les applications sont arrivées assez récemment. Les principales applications sont dans la théorie du *codage* : comment transmettre sans erreur un message numérique. Neil Sloane (1939–), des Bell Labs, en est le principal spécialiste.
Quand on transmet un message numérique, les message possibles correspondent à des points dont les coordonnées peuvent être modifiés (erreurs). Pour retrouver le message en cas d’erreur, on peut mettre les messages possibles au centres de sphères disjointes.

Mais au fait à quoi ça sert ?

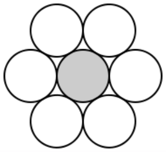
Les mathématiciens s'intéressent aux empilements de sphères depuis Kepler, mais les applications sont arrivées assez récemment. Les principales applications sont dans la théorie du *codage* : comment transmettre sans erreur un message numérique. Neil Sloane (1939–), des Bell Labs, en est le principal spécialiste.
Quand on transmet un message numérique, les message possibles correspondent à des points dont les coordonnées peuvent être modifiés (erreurs). Pour retrouver le message en cas d'erreur, on peut mettre les messages possibles au centres de sphères disjointes.
Connaître des empilements denses de sphères permet donc de transmettre efficacement des messages.

Le "Kissing number"



La recherche d'empilements optimaux conduit immédiatement à la question suivante : en dimension d combien de boules disjointes peuvent être tangentes à une boule donnée ? C'est le Kissing number $K(d)$.

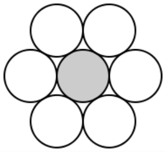
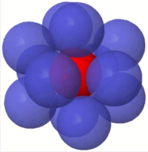
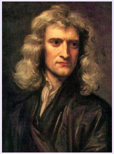
Le “Kissing number”



La recherche d’empilements optimaux conduit immédiatement à la question suivante : en dimension d combien de boules disjointes peuvent être tangentes à une boule donnée ? C’est le Kissing number $K(d)$.

- $K(2) = 6$ – c’est facile à voir.

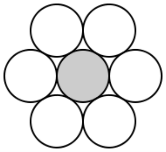
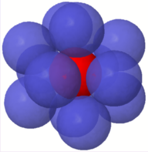
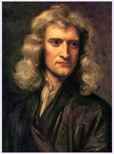
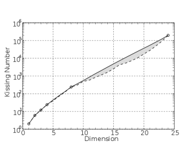
Le "Kissing number"

La recherche d'empilements optimaux conduit immédiatement à la question suivante : en dimension d combien de boules disjointes peuvent être tangentes à une boule donnée ? C'est le Kissing number $K(d)$.

- $K(2) = 6$ – c'est facile à voir.
- $K(3) = 12$ – démontré en 1953, après une controverse célèbre entre Isaac Newton (1643–1727) et David Gregory (1659–1708).

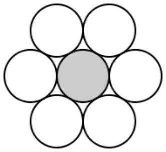
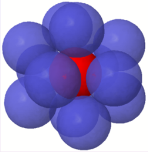
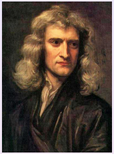
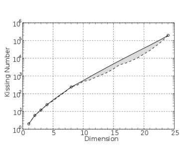
Le “Kissing number”

La recherche d'empilements optimaux conduit immédiatement à la question suivante : en dimension d combien de boules disjointes peuvent être tangentes à une boule donnée ? C'est le Kissing number $K(d)$.

- $K(2) = 6$ – c'est facile à voir.
- $K(3) = 12$ – démontré en 1953, après une controverse célèbre entre Isaac Newton (1643–1727) et David Gregory (1659–1708).
- $K(4) = 24$ – démontré en 2003.

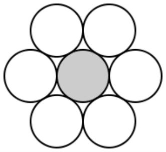
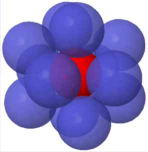
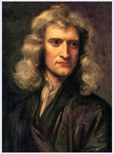
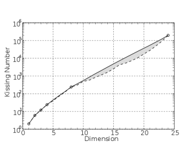
Le “Kissing number”

La recherche d'empilements optimaux conduit immédiatement à la question suivante : en dimension d combien de boules disjointes peuvent être tangentes à une boule donnée ? C'est le Kissing number $K(d)$.

- $K(2) = 6$ – c'est facile à voir.
- $K(3) = 12$ – démontré en 1953, après une controverse célèbre entre Isaac Newton (1643–1727) et David Gregory (1659–1708).
- $K(4) = 24$ – démontré en 2003.
- $K(8) = 240$, $K(24) = 196,560$.

Le “Kissing number”

La recherche d’empilements optimaux conduit immédiatement à la question suivante : en dimension d combien de boules disjointes peuvent être tangentes à une boule donnée ? C’est le Kissing number $K(d)$.

- $K(2) = 6$ – c’est facile à voir.
- $K(3) = 12$ – démontré en 1953, après une controverse célèbre entre Isaac Newton (1643–1727) et David Gregory (1659–1708).
- $K(4) = 24$ – démontré en 2003.
- $K(8) = 240$, $K(24) = 196,560$.
- Toutes les autres valeurs sont inconnues !

$40 \leq K(5) \leq 44$, $72 \leq K(6) \leq 78$, ...

The end

C’est terminé !
Questions ? ?