Cours de maitrise de math, MMB B2
Correction abrégée du devoir no 1

7 Novembre 2001

1. Formule de Crofton dans $\mathbf{R}^2$

1.1 L'énoncé définit explicitement une application de $S^1 \times \mathbf{R}$ dans D_0. Cette application est injective car θ et r déterminent les droites, et surjective car chaque droite a un vecteur directeur et est à une distance donnée de x_0 sur la normale orientée à ce vecteur.

1.2 On calcule explicitement la différentielle de $d^{-1} \circ d'$; si $x_0 = x_1 + r_0(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$, alors la matrice de la différentiele est:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_0 \sin(\theta - \theta_0) & 1 \end{pmatrix} .$$

On voit que le déterminant de cette matrice est 1, si bien qu'elle préserve les mesures produit.

1.3 La mesure produit sur $S^1 \times \mathbf{R}$ détermine une mesure sur D_0, qui d'après la question précédente est indépendante de x_0.

1.4 Soit θ_0 l'angle entre $(1,0)$ et le vecteur directeur de g_0. On choisit $x_0 \in g_0$. Pour θ fixé, l'intervalle des valeurs de r correspondant à des droites qui recontrent g_0 est $l|\sin(\theta - \theta_0)|$. La mesure totale de l'ensemble des droites rencontrant g_0 est donc:

$$\int_0^{2\pi} l|\sin u| du = 4l .$$

1.5 Soit d'abord g une courbe polygonale; on voit que l'intégrale de n est la somme des intégrale correspondante pour chacun des segments de g. Pour chaque segment c'est simplement l'aire calculée à la question précédente, soit 4 fois la longueur.

En approchant g par une suite de polygones g_q, on voit que les fonctions associées n_q convergent vers n en mesure, alors que, pour tout q, l'intégrale de n_q est simplement 4 fois la longueur de g_q. Comme les longueurs des g_q convergent vers la longueur de g, l'intégrale de n est égale à 4 fois la longueur de g.

2. Formule de Crofton dans $\mathbf{R}^3$

2.1 L'énoncé définit l'application de $S^2 \times \mathbf{R}$ dans P_0. Cette application est injective: si deux points (N, r) et (N', r') ont pour image le même plan orienté, alors $N = N'$ (car le vecteur normal unitaire est le même) et $r = r'$ (car le point d'intersection avec la droite dirigée par N est le même). Par ailleurs l'application est surjective car tout plan orienté a un vecteur normal donné et rencontre la droite issue de 0 dans la direction de ce vecteur normal.

2.2 Un calcul simple montre que $p^{-1} \circ p'$ s'écrit

$$(N, r) \to (N, r - \langle N, x_0 - x_1 \rangle) .$$

La différentielle a donc la forme suivante, par blocs (pour la composante dans S^2 est la composante sur $\mathbf{R}$):

$$\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ \star & 1 \end{pmatrix}$$

si bien que son déterminant est 1.

2.3 Comme avant, on utilise par exemple p, et on remarque que la mesure obtenue ne change pas si on remplace x_0 par x_1.

2.4 D'après la question précédente, on peut prendre x_0 en l'une des extrémités de g_0. Pour $N \in S^2$ fixé, on remarque que les valeurs de r telles que $p(N, r)$ rencontre g_0 sont $[0, l|\langle N, v\rangle|]$, où l est la longueur de g_0 et v est son vecteur directeur unitaire. Ainsi, la mesure pour ν_0 de l'ensemble des plans cherchés se calcule en intégrant sur S^2, en prenant un système de coordonnées sphériques (θ, ϕ) où θ est l'angle avec v:

$$V = l \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} |\cos\theta| \sin\theta d\phi d\theta \ ,$$

donc:

$$V = 4l\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \ ,$$

soit $V = 2l\pi$.

2.5 En faisant le même raisonnement que dans le plan, avec une approximation par une courbe polygonale, on trouve que:

$$\int_{P_0} m d\nu_0 = 2\pi L \ .$$

3. Courbure totale dans $\mathbf{R}^3$

On considère encore une courbe régulière $c : \mathbf{R}/L\mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$ paramétrée à vitesse 1.

3.1 Il suffit de montrer que l'image réciproque de T par p est compacte. Or elle est fermée par définition, alors que $p^{-1}(T) \cap \{N\} \times \mathbf{R}$ est contenu dans $S^2 \times [-d(c, x_0)], d(c, x_0)]$: si $r > d(c, x_0)$ alors $p(N, r)$ est à distance plus grande que $d(c, x_0)$ de x_0 et ne peut donc pas rencontrer c. Donc $p^{-1}(T)$ est compact, et donc T aussi.

3.2 Soit $s \in \mathbf{R}/L\mathbf{Z}$. Un point $N \in S^2$ est image par π d'un plan qui est tangent à c en $c(s)$ ssi N est orthogonal à c'. Quand t varie, $c'(t)$ se déplace sur S^2 à vitesse k, et l'aire sur S^2 des images par π des plans tangents à c sur un petit segment $[a, b]$ où la courbure k ne s'annule pas est donc:

$$\int_a^b \int_{\phi=0}^{2\pi} k(s) |\sin\phi| d\phi ds = 4 \int_a^b k ds \ .$$

En décomposant $\mathbf{R}/L\mathbf{Z}$ en segments où k ne s'annule pas, on voit que l'intégrale de M sur S^2 est la somme des aires correspondant aux segments, soit:

$$\int 4k(s) ds \ .$$

3.3 On montre en fait l'existence de deux tels plans. En effet, on considère le min et le max des valeurs de r pour lesquelles $p(N, r)$ rencontre c.

3.4 La question précédente montre que $M \geq 2$ partout sur S^2, si bien que:

$$4 \int k(s) ds = \int_{S^2} M da \geq \int_{S^2} 2 da \geq 8\pi \ .$$