# Cours de maitrise de math, MMB B2
# Correction abrégée de la partie 1 du devoir no 2

## 1 Solides platoniques

### 1. Polygones du plan

D'après le théorème de Gauss-Bonnet, la somme des angles extérieurs est $2\pi$. Comme les $k$ angles sont égaux, chaque angle extérieur est égal à $2\pi/k$, donc chaque angle intérieur est $\pi - 2\pi/k = \pi(k-2)/k$.

### 2. Polygones dans $S^2$

**2.1** Les bords des demi-espaces sont des plans contenant 0, dont les intersections avec $S^2$ sont des géodésiques. Donc le bord de $P$ est la réunion d'un nombre fini segments géodésiques.

**2.2** On considère le sous-ensemble $Q'$ de $\mathbf{R}^3$ défini comme $Q$, mais en prenant un vecteur $N$ de norme quelconque. On remarque que, si $V \in S^2$, l'ensemble des vecteurs $N \in \mathbf{R}^3$ non nuls tels que $\langle V, N \rangle > 0$ est un demi-espace; or $Q'$ est l'intersection de ces demi-plans lorsque on prend pour $V$ les sommets de $P$. Donc $Q'$ est la réunion d'un ensemble fini de demi-plans, et $Q$ est un polygone de $S^2$.

**2.3** D'après le théorème de Gauss-Bonnet, la somme des angles extérieurs du bord de $Q$ est égale à $2\pi$ moins l'intégrale de la courbure sur l'interieur de $Q$. Comme la courbure de $S^2$ est 1, ce terme est positif, et la somme des angles extérieurs du bord de $Q$ est inférieure à $2\pi$.

Soit $s$ un sommet de $Q$, on lui associe l'ensemble des $N \in S^2$ tels que le plan orthogonal à $N$ contient $s$. Par construction c'est une arête de $Q$, dont la longueur est égale à l'angle extérieur de $P$ en $s$.

Soit $R \subset S^2$ le sous-ensemble défini comme $Q$, mais en remplaçant $P$ par $Q$. On remarque que $R = Q$: en effet, si $N \in S^2$, la définition de $Q$ indique que:

$$\begin{aligned}
N \in P \quad & \Leftrightarrow \quad \forall N' \in Q, N \notin N'^{\perp} \\
& \Leftrightarrow \quad \forall N' \in Q, \langle N', N \rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad Q \cap N^{\perp} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad N \in R
\end{aligned}$$

En appliquant le résultat précédent en échangeant $Q$ et $P$, on voit donc que la longueur des arêtes $P$ est égale à l'angle extérieur de $Q$ aux sommets correspondants.

Donc la somme des longueurs des arêtes du bord de $Q$ est inférieur à $2\pi$.

### 3. Nombre de faces, etc

Chaque arête borde deux faces, et chaque face a $k$ arêtes, donc en comptant de deux manières le nombre de couples $(f, a)$ où $a$ est une arête contenue dans la face $f$, on trouve:

$$kf = 2a \ .$$

De même, chaque sommet est dans $p$ faces, alors que chaque face a $k$ sommets, si bien que:

$$kf = ps \ .$$

Enfin, la formule d'Euler indique que: $f - a + s = 2$.

En remplaçant $a$ et $s$ dans cette formule on trouve que:

$$f - \frac{kf}{2} + \frac{kf}{p} = 2 \ ,$$

si bien que:

$$f(2p - kp + 2k) = 4p \ ,$$

et la formule pour $f$ s'en déduit. On en déduit directement les formules pour $a$ et $s$.

## 4. Solides platoniques

**4.1** On choisit $\epsilon$ assez petit pour que la sphère $S_\epsilon$ de centre $S$ et de rayon $\epsilon$ rencontre toutes les faces de $K$ contenant $S$ mais pas les autres. Alors l'intersection de $K$ avec $S_\epsilon$ est l'intersection avec $S_\epsilon$ du domaine borné par les faces de $K$, donc par un nombre fini de demi-plans contenant $S$. Donc c'est, par définition, un polygone de $S_\epsilon$.

Soit $f$ une face de $K$ contenant $S$, et soit $a_1, a_2$ les deux segments contenant $f$ qui bordent $f$ et qui contiennent $S$. Soit $n_1$ et $n_2$ les intersections de $a_1$ et $a_2$, respectivement, avec $S_\epsilon$. La distance entre $n_1$ et $n_2$ sur $S_\epsilon$ est $\epsilon$ fois l'angle entre les directions de $n_1$ et $n_2$, donc $\epsilon$ fois l'angle intérieur de la face $f$ en $S$ (NB: il manquait un $\epsilon$ dans l'énoncé).

**4.2** On fait subir à $S_\epsilon$ une homothétie de facteur $1/\epsilon$, pour obtenir une sphère de rayon 1. On note $P'$ l'image de $P$ par cette homothétie, $P'$ est donc un polygone de $S^2$. D'après les question 1 et 4.1, les cotés de $P'$ sont de longueur $\pi(k-2)/k$. Comme $P'$ a au moins 3 faces, la longueur totale de son bord est au moins $3\pi(k-2)/k$. Or pour $k \geq 6$, $3\pi(k-2)/k \geq 2\pi$. Or la longueur totale de $P'$ est strictement inférieure à $2\pi$. Donc $k \leq 5$.

**4.3** La longueur des arêtes de $P'$ est alors $\pi(k-2)/k = 3\pi/5$. Comme la longueur totale de $P$ est inférieure à $2\pi$, le nombre d'arêtes de $P$ est nécessairement 3. (NB: il fallait lire $p = 3$ et non $p = 4$ dans l'énoncé !).

En utilisant les formules de la question 3, on trouve que:

$$a = 30, \ s = 20, \ f = 12 \ .$$

Le polyèdre correspondant est le dodécaèdre, visible sur la partie droite du dessin de Kepler qui se trouve dans l'énoncé. Comme la question était "optionnelle" on laisse au lecteur la démonstration de son existence; il s'agit de montrer qu'il y a une unique manière de coller 12 pentagone réguliers, dont les cotés sont de même longueur, de manière que le résultat soit un polyèdre convexe, dont les intersections avec des sphères de rayon $\epsilon$ petit, centrées aux sommets, soient des triangles dont les cotés sont de longueur $2\pi\epsilon/5$. On obtient alors le dodécaèdre.

**4.4** On suppose que $k = 4$. Maintenant l'angle intérieur des faces est $\pi/2$, toujours d'après la question 1, et c'est aussi la longueur des arêtes de $P'$. Comme la longueur totale du bord de $P'$ est strictement inférieure à $2\pi$, $P'$ a nécessairement 3 arêtes, donc $p = 3$. (NB: il fallait lire "$k = 4$" dans l'énoncé !).

La question 3 montre que $a = 12, f = 6, s = 8$, Le polyèdre cherché est le cube, qui a bien 4 arêtes par face et pour lequel chaque sommet est bien dans 3 faces.

**4.5** Pour $k = 3$, la longueur des arêtes de $P'$ est $\pi/3$, il peut donc y en avoir $3, 4$ ou 5 (toujours parce que la longueur du bord de $P'$ est inférieure strictement à $2\pi$).

Pour $p = 3$, on trouve avec la question 3 que $a = 6, f = 4, s = 4$; on obtient donc le simplexe, pyramide à base triangulaire.

Pour $p = 4$, on trouve que $a = 12, f = 8, s = 6$: c'est l'octaèdre, qu'on obtient par exemple en prenant pour sommets les points de coordonnée $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,0), (0,-1,0), (0,0,-1)$ dans $\mathbf{R}^3$.

Pour $p = 5$, on obtient $a = 30, s = 12, f = 20$; c'est l'icosaèdre (visible à droite dans la figure de Kepler). Là aussi la question était "facultative", et on laisse les détails au lecteur; il suffit de montrer qu'il y a une unique manière de faire un polyèdre convexe en recollant 20 triangles réguliers de cotés de longueur 1, de manière que les intersections avec des sphères de rayon $\epsilon$ petit, centrées aux sommets, soient des pentagones dont les cotés sont de longueur $\pi\epsilon/3$.