Cours de maitrise de math, MMB B2
Devoir no 2

17 Décembre 2001

1 Solides platoniques

Un polyèdre dans $\mathbf{R}^3$ un compact qui est l'intersection d'une famille finie de demi-plans fermés. Un polyèdre est régulier si ses faces sont deux à deux isométriques, et si pour tous sommets S et S' et toutes arêtes $A \supset S$ et $A' \supset S'$, il existe une isométrie de $\mathbf{R}^3$ qui envoie S sur S' et A sur A'. L'objet principal de ce devoir est de retrouver un résultat connu de Euclide, la classification des polyèdres réguliers de $\mathbf{R}^3$ (aussi appelés "solides platoniques").

1. Polygones du plan

Soit P un polygone du plan. On dit que P est régulier si toutes ses arêtes ont même longueur et tous ses angles sont égaux. Montrer que, si P est régulier et a k cotés, alors l'angle (intérieur) en chaque sommet est $\pi(k-2)/k$.

2. Polygones dans S^2

Un polygone de S^2 est un sous-ensemble de S^2 qui est l'intersection de S^2 et d'un nombre fini de demi-espaces fermés dont la frontière contient 0.

2.1 Soit P un polygone de S^2. Montrer que le bord de P est la réunion d'un nombre fini de segments géodésiques de S^2.

On appelle ces segments les arêtes de P, et les angles entre les segments sont les angles de P. P est régulier si toutes ses arêtes ont la même longueur, et tous ses angles sont égaux.

2.2 On associe à P un ensemble $Q \subset S^2$ de la manière suivante. Soit $N \in S^2$, on le considère comme un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^3$, et on prend le plan orienté orthogonal à N passant par 0; on décide que $N \in Q$ si et seulement si ce plan ne rencontre pas P.

Montrer que Q est encore un polygone de S^2, que les angles extérieurs de son bord sont égaux aux longueur des cotés du bord de P, et que les longueurs des cotés de son bord sont égales aux angles extérieurs du bord de P.

2.3 Montrer que la somme des angles extérieurs du bord de Q est inférieure à 2π, et en déduire que la longueur du bord de P est strictement inférieure à 2π.

3. Nombre de faces, etc

On considère un polyèdre régulier K ayant s sommets, a arêtes et f faces. On suppose que chaque face a k arêtes, et que chaque sommet est contenu dans p faces. Montrer que:

$$a = \frac{2kp}{2k+2p-kp}\ , \quad s = \frac{4k}{2k+2p-kp}\ , \quad f = \frac{4p}{2k+2p-kp}\ .$$

,

Figure 1: Le système solaire d'après J. Kepler (1596)

4. Solides platoniques

On note S un des sommets de K.

4.1 Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, la sphère de rayon ϵ de centre S rencontre K en un polygone régulier P de S^2. Montrer que la longueur des arêtes de P est égale à *epsilon* fois l'angle intérieur des faces de K.

4.2 Montrer que $k \leq 5$.

4.3 On suppose que $k = 5$. Montrer que $p = 3$. En déduire le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de K. Montrer qu'il existe en effet un polyèdre régulier correspondant (cette dernière question est délicate et pourra être laissée de coté).

4.4 On suppose que $k = 4$. Montrer que $p = 3$. En déduire le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de K. Montrer qu'il existe en effet un polyèdre régulier correspondant.

4.5 On suppose que $k = 3$. Montrer que $p \in \{3, 4, 5\}$. En déduire dans chaque cas le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de K. Montrer qu'il existe en effet un polyèdre régulier correspondant (le cas $p = 5$ est délicat et pourra être laissé de coté).

2 Champs de vecteurs sur une surface et théorème de Poincaré

On veut donner une démonstration élémentaire du théorème de Poincaré:

La somme des indices d'un champ de vecteurs différentiable dont les singularités sont isolées sur une surface compacte orientée Σ est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface.

Définition de l'indice: Soit X est un champ de vecteurs sur Σ et $p \in \Sigma$ un point singulier isolé de X, i.e. tel que $X(p) = 0$. On choisit une courbe continue fermée simple, régulière par morceaux, orientée dans le sens direct $\alpha : [0, l] \to \alpha(t) \in \Sigma$ telle que $\alpha([0, l])$ borde une région Δ simple contenant p comme seul point singulier. L'indice de X en p est défini comme le degré de l'application $t \in \mathbf{R}/l\mathbf{Z} \to \frac{X(t)}{|X(t)|}$. On admettra que l'indice ne dépend pas du choix de la courbe α.

(0) Montrer que si Y est un champ sans singularité sur Δ, son indice en p est nul.

(1) Exemples: Représenter les courbes intégrales des champs de vecteurs de $\mathbf{R}^2$ suivants: $X(x,y) = (-x,-y)$, $X(x,y) = (-y,x)$, $X(x,y) = (-x,y)$, et calculer leurs indices en 0.

(2) Montrer que si X est un champ de vecteurs sur Σ avec singularités en $x_1, \ldots, x_n$, alors $Ind(X) := \sum_{i=1}^{n} ind(X_i, x_i)$ est indépendant de X.
Indication: Pour X, Y deux champs, on admettra l'existence d'une triangulation de la surface orientée telle que:
(i) les singularités de X et Y sont dans l'intérieur des faces des triangles;
(ii) un triangle contient au plus une singularité de X et une singularité de Y;
(iii) les triangles sont orientés de façon cohérente par l'orientation de Σ.

(3) Pour $\Sigma = S^2$ ou $\Sigma = T^2$ (le tore), trouver un champ sur Σ et vérifier la formule.

(4) On traîte le cas où $\Sigma = \Sigma_g$ est de genre $g \geq 2$.

(a) Calculer $I(X_0)$ pour le champ de la sphère à 3 trous (ou "pantalon") dont les courbes intégrales sont représentées sur la figure ci-desssous, avec p comme point singulier:

p

(b) Observer qu'on peut réaliser Σ_g par recollement topologique de plusieurs copies de pantalons, et en déduire l'existence d'un champ X tel que $I(X) = 2 - 2g = \chi(\Sigma_g)$.