Cours de Maîtrise de Mathématiques,
MMD B2 : courbes, surfaces et sous-variétés
Examen final, 23 Janvier 2003

1. Courbes dans le plan.

On considère une courbe fermée simple régulière paramétrée dans le plan, soit $c : \mathbf{R}/L\mathbf{Z} \to \mathbf{R}^2$. On suppose que c est paramétrée à vitesse 1, et on note $\nu(s)$ le vecteur normal unitaire en $c(s)$, qu'on suppose orienté du coté intérieur de c, et $k(s)$ sa courbure au point $c(s)$, définie en réference à ν.

1.1 Pour tout $r > 0$, on note :

$$c_r : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}/L\mathbf{Z} & \to & \mathbf{R}^2 \\ s & \mapsto & c(s) - r\nu(s) \end{array} .$$

Montrer que, pour r assez petit, c_r est une courbe simple paramétrée. Montrer que, si c est convexe, alors c_r est une courbe simple paramétrée pour tout $r > 0$.

1.2 En supposant c convexe, exprimer la vitesse et la courbure de c_r en chaque point. Exprimer l'aire du domaine borné par c_r en fonction de r et de quantités relatives à c.

1.3 On considère maintenant la courbe c_r définie comme plus haut, mais pour $r < 0$. On suppose que c est convexe, et de courbure partout au plus k_0. Montrer que, pour $0 > r > -1/k_0$, c_r est une courbe fermée simple paramétrée.

1.4 En déduire que, sous ces hypothèses, le domaine compact borné par c contient une boule ouverte de rayon $1/k_0$.

2. Intersection orthogonale de surfaces.

2.1 Soit S une surface orientable dans $\mathbf{R}^3$, et soit c une courbe tracée sur S. On note N un champ de vecteurs unitaires orthogonal à S. Montrer que c est une ligne de courbure de S si et seulement si, pour tout vecteur u tangent à c, $D^0_u N$ est parallèle à u.

2.2 On considère un ouvert U de $\mathbf{R}^3$, et un "système triplement orthogonal" dans U : trois familles de surfaces F_1, F_2, F_3 telles que :

- par chaque point $p \in U$ passe exactement une surface de chaque famille.
- les trois surfaces S_1, S_2 et S_3 passant par p sont deux à deux orthogonales, i.e. T_pS_1, T_pS_2 et T_pS_3 sont orthogonaux.

On note N_1, N_2 et N_3 des champs de vecteurs unitaires sur U, orthogonaux aux surfaces respectivement des familles F_1, F_2 et F_3. Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont partout orthogonaux, et qu'on a en tout point de U : $\langle [N_1, N_2], N_3 \rangle = 0$.

2.3 Montrer que, si v_1, v_2 et v_3 sont trois champs de vecteurs dans $\mathbf{R}^3$, on a :

$$v_1.\langle v_2, v_3\rangle - v_2.\langle v_1, v_3\rangle + v_3.\langle v_1, v_2\rangle = \langle [v_1, v_2], v_3\rangle - \langle [v_2, v_3], v_1\rangle - \langle [v_3, v_1], v_2\rangle + 2\langle D^0_{v_3} v_1, v_2\rangle \ .$$

2.4 En déduire que, en tout point de U, $D^0_{N_3} N_1$ est parallèle à N_3.

2.5 Montrer que l'intersection entre S_1 et S_2 est une ligne de courbure sur S_1 et S_2, et de même pour $S_1 \cap S_3$ et $S_2 \cap S_3$ (théorème de Dupin).

3. Applications du théorème de Gauss-Bonnet.

3.1 Soit S une surface à courbure négative ou nulle. Montrer qu'il n'existe pas de domaine dans S, homéomorphe à un disque, et dont le bord est composé de deux segments géodésiques. Est-ce vrai si on suppose S à courbure positive ou nulle ?

3.2 Soit $\phi : S^1 \times [0, 1] \to \mathbf{R}^3$ une application régulière, injective, et dont la différentielle est partout de rang 2. Exprimer l'intégrale de la courbure de S en fonction de l'intégrale de la courbure géodésique des deux composantes connexes de son bord (en précisant l'orientation choisie).

3.3 Soit S une surface à courbure négative ou nulle. Soit c une géodésique fermée simple dans S. Montrer qu'il n'existe pas d'autre géodésique fermée simple dans S, homotope à c (on pourra utiliser les questions 3.1 et 3.2).

3.4 * On suppose maintenant que S est une surface compacte orientable à courbure strictement positive. Montrer que deux géodésiques fermées simples de S se rencontrent nécessairement. (On pourra admettre le fait suivant : la seule surface orientable dont la caractéristique d'Euler est strictement positive est la sphère).

Que peut-on dire si on suppose que S est à courbure positive ou nulle ?