Maîtrise de Mathématiques
Courbes, surfaces et sous-variétés
Examen de Septembre 2003

Exercice 1: Intersection d'une surface et d'un plan

1.1 On se donne une surface S dans $\mathbf{R}^3$, et une courbe γ régulière tracée à vitesse unité sur S. Soit $x \in \gamma$. Soit c la courbure de γ – vue comme courbe de $\mathbf{R}^3$ – en x, et k la courbure géodésique de γ, vue comme courbe de S. Donner une expression qui relie c, k, et la seconde forme fondamentale de S en x.

1.2 On se donne maintenant un plan P, et un point $x \in S \cap P$. On suppose que P rencontre S transversalement. Exprimer la courbure géodésique en x de $P \cap S$:

1. en tant que courbe tracée sur P;
2. en tant que courbe tracée sur S.

On pourra faire intervenir l'angle θ entre T_xS et P, la seconde forme fondamentale de S en x, ainsi qu'un vecteur unitaire $v \in T_xS \cap P$.

1.3 On suppose maintenant que S est la sphère de rayon 1 et de centre 0, et que P est le plan horizontal d'équation $\{z = z_0\}$, noté P_{z_0}. Utiliser la question précédente pour exprimer la courbure géodésique de $S \cap P_{z_0}$, en tant que courbe tracée sur S. Retrouver le résultat en utilisant le théorème de Gauss-Bonnet.

Exercice 2 : Courbure totale d'un graphe

2.1 On se donne une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^∞, nulle en dehors du disque de rayon 1. On considère la surface S qui est le graphe de f dans $\mathbf{R}^3$. Calculer l'intégrale de la courbure de S.

2.2 Que dire si on suppose maintenant que $f(x) = |x|$ hors du disque de rayon 1 ?

Exercice 3 : cercle osculateur

Soit : $c : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc, où I est un intervalle. On suppose que $c''(s) \neq 0$ pour tout s. On rappelle que le cercle osculateur à la courbe en $c(s_0)$ est l'un des deux cercles tangents à la courbe c en $c(s_0)$ et de rayon $1/c''(s_0)|$. On le note $C_o(s_0)$.

3.1 Montrer que, si $s_1, s_2, s_3 \in I$ sont deux à deux distincts mais assez proches, il existe un unique cercle passant par $c(s_1), c(s_2)$ et $c(s_3)$. On le notera $C(s_1, s_2, s_3)$.

3.2 Montrer que, lorsque $(s_1, s_2, s_3) \to (s_0, s_0, s_0)$ (avec s_1, s_2, s_3 deux à deux distincts), $C(s_1, s_2, s_3)$ tend vers $C_o(s_0)$, au sens où le centre et le rayon de $C(s_1, s_2, s_3)$ tendent vers le centre et le rayon de $C_o(s_0)$.

3.3 Montrer que la distance de $c(s)$ au cercle osculateur $C_o(s_0)$ est en $o((s - s_0)^2)$.