Cours de Maîtrise de Mathématiques,
MMD B2 : courbes, surfaces et sous-variétés
Examen final, 10 Janvier 2004

## 1. Une surface de révolution.

On définit une surface paramétrée dans $\mathbf{R}^3$ par :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbf{R}_+^* \times S^1 & \to & \mathbf{R}^3 \\ & (u,\theta) & \mapsto & \left(\frac{\cos(\theta)}{\cosh(u)}, \frac{\sin(\theta)}{\cosh(u)}, u - \tanh(u)\right) . \end{array}$$

**1.0** Montrer que $S := \phi(\mathbf{R}_+^* \times S^1)$ est une surface.

**1.1** Pour tout $u \in \mathbf{R}_+^*$ et tout $\theta \in S^1$, on pose : $\gamma_u(\theta) = \phi(u,\theta)$. Calculer la vitesse, la courbure et la torsion de la courbe $\gamma_u$, en fonction de $u$. Décrire géométriquement ces courbes.

**1.2** Pour tout $u \in \mathbf{R}_+^*$, on pose : $\gamma(u) = \phi(u, 0)$. Calculer la vitesse, la courbure et la torsion de cette courbe.

**1.3** En utilisant les deux premières questions, donner la première et la seconde forme fondamentale de la surface $S$, image de $\phi$, dans la base $(X, Y)$, où :

$$X = \frac{\partial_u \phi}{\|\partial_u \phi\|} \ , \quad Y = \frac{\partial_\theta \phi}{\|\partial_\theta \phi\|} \ .$$

**1.4** En déduire la courbure de $S$ en tout point.

**1.5** Donner une expression de la métrique $h$ induite sur $\mathbf{R}_+^* \times S^1$ par $\phi$, sous la forme :

$$h = a(u)du^2 + b(u)dud\theta + c(u)d\theta^2 \ .$$

En posant $t := \log(\cosh(u))$, exprimer cette métrique $h$ dans les coordonnées $t$ et $\theta$.

**1.6** On pose :

$$U := \frac{\partial_t}{\|\partial_t\|_h} \ , \quad V := \frac{\partial_\theta}{\|\partial_\theta\|_h} \ .$$

a. Montrer que les courbes intégrales de $U$ sont des géodésiques. En déduire que $D_U U = D_U V = 0$, où $D$ est la connexion associée à la métrique $h$.

b. Calculer $[U, V]$.

c. En déduire $D_V U$ puis $D_V V$.

**1.7** Calculer la courbure de la métrique $h$. Comparer avec le résultat de la question 1.4.

## 2. Le modèle de Klein du plan hyperbolique.

On définit une métrique $h_0$ sur le disque unité de $\mathbf{R}^2$, en coordonnées polaires, par :

$$h_0 = \frac{\rho^2}{1-\rho^2} d\theta^2 + \frac{1}{1-\rho^2} d\rho^2 \ .$$

**2.1** Montrer que cette métrique est complète. Exprimer la distance, pour $h_0$, entre l'origine et le point de coordonnées $(\rho, \theta)$.

**2.2** En faisant le changement de variable : $\rho = \tanh(r)$, exprimer $h_0$ sous la forme :

$$h_0 = a(r)dr^2 + b(r)drd\theta + c(r)d\theta^2 \ .$$

**2.3** On pose :

$$U := \frac{\partial_r}{\|\partial_r\|_{h_0}} \ , \quad V := \frac{\partial_\theta}{\|\partial_\theta\|_{h_0}} \ .$$

Montrer que les courbes $\{\theta = \theta_0\}$ sont géodésiques. En déduire que $D_U U = D_U V = 0$, où $D$ est la connexion associée à $h_0$.

**2.4** Calculer $[U, V]$ et en déduire $D_V U$ puis $D_V V$.

**2.5** Calculer la courbure de la métrique $h_0$.

**2.6*** Rappeler une paramétrisation en coordonnées polaires de la droite d'équation $y = y_0$ dans $\mathbf{R}^2$. En déduire la courbure géodésique, pour la métrique $h_0$, de l'intersection de cette droite avec le disque unité.

**2.7*** Décrire toutes les géodésiques du disque unité pour la métrique $h_0$.

### 3. Un théorème de Hilbert.

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe pas de plongement $\psi : D^2 \to \mathbf{R}^3$ du disque unité $D^2$ de $\mathbf{R}^2$ dans l'espace euclidien, tel que la métrique induite sur $D^2$, soit $h_1$, est complète et à courbure constante $K = -1$. On va raisonner par l'absurde et supposer l'existence d'un tel plongement. On appelle $S$ son image, qui est donc une surface de $\mathbf{R}^3$.

**3.1** Montrer qu'il existe en tout point du disque unité deux vecteurs $U$ et $V$, unitaires pour $h_1$, tels que :

$$BU = JU \ , BV = -JV \ .$$

Ici $J$ est l'opérateur défini sur chaque espace tangent par "rotation d'angle $\pi/2$". Dans la suite, on admettra que $U$ et $V$ peuvent être définis globalement, c'est à dire sur tout $D^2$.

**3.2** En utilisant l'équation de Codazzi, montrer qu'on a :

$$B(D_U V - D_V U) = J(D_U V + D_V U) \ .$$

**3.3** En étudiant l'action de l'endomorphisme $JB$ sur chaque espace tangent, en déduire qu'on a :

$$D_U V = D_V U = 0 \ .$$

**3.4** Montrer que, au voisinage de chaque point $m \in S$, il existe une application paramétrisation locale $u : \Omega \to \mathbf{R}^3$ d'un voisinage de $m$ dans $S$, où $\Omega$ est un ouvert de $\mathbf{R}^2$, telle que :

$$U = \partial_x u \ , \quad V = \partial_y u \ .$$

**3.5*** Montrer qu'on a en fait une paramétrisation globale $u : \mathbf{R}^2 \to S$ ayant cette propriété. (Cette question, plus délicate, pourra être admise).

**3.6** Pour tout $x, y \in \mathbf{R}_+^*$, on appelle $\Omega_{x,y}$ l'image par $u$ dans $S$ du rectangle $[-x, x] \times [-y, y]$ de $\mathbf{R}^2$. En utilisant $U$ et $V$, donner une majoration de la courbure géodésique totale du bord de $\Omega_{x,y}$.

**3.7*** Montrer que l'aire de $D^2$ pour la métrique $h_1$ est nécessairement infinie, et conclure que $\psi$ ne peut exister.