Cours de Maîtrise de Mathématiques,
MMD B2 : courbes, surfaces et sous-variétés.
Session de rattrapage, 8 Septembre 2004

Le barême est donné à titre indicatif, il pourra être modulé.

## 1. Etude d'une ellipse. 6 pts

On souhaite étudier la courbe (E) d'équation :

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 1$$

dans le plan euclidien, avec $a, b > 0$.

**1.1.** Montrer que (E) a une paramétrisation du type :

$$\gamma(t) = (\lambda \cos(t), \mu \sin(t)) \ ,$$

pour des valeurs de $\lambda, \mu$ qu'on exprimera en fonction de $a$ et $b$.

**1.2.** Calculer la vitesse de $\gamma$, son vecteur tangent unitaire et son vecteur normal unitaire.

**1.3.** En déduire la courbure de $\gamma$ en fonction de $t$.

**1.4.** Quelle est la courbure totale de cette courbe ?

## 2. Etude d'une surface simple. 6 pts

On considère la surface $S \subset \mathbf{R}^3$ d'équation :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \ , z > 0 \ .$$

**2.1.** Montrer que $S$ est une surface. Est-elle complète ? Réglée ?

**2.2.** Donner une paramétrisation de $S$.

**2.3.** Exprimer la courbure moyenne et la courbure de $S$ en un point $(x, y, z)$ en fonction de la distance de ce point à l'origine.

**2.4.** Montrer que $S$ est développable.

## 3. La formule d'Euler-Meusnier. 8 pts

On souhaite exprimer la courbure de l'intersection de deux surfaces $S_1$ et $S_2$ de $\mathbf{R}^3$ en fonction des invariants extrinsèques de ces surfaces. On suppose que $S_1 = u_1^{-1}(\{0\})$ et que $S_2 = u_2^{-1}(\{0\})$, où $u_1$ et $u_2$ sont des fonctions régulières de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$. On notera $n_1$ et $n_2$ des champs de vecteurs unitaires normaux à $S_1$ et $S_2$, respectivement.

**3.1.** Quelle condition supplémentaire faut-il demander à $u_1$ et $u_2$ pour s'assurer que $S_1$ et $S_2$ sont des surfaces ? Montrer que cette condition est nécessaire en donnant un (contre-)exemple.

On supposera dans la suite que cette condition est satisfaite. On considère un point $x_0$ tel que $u_1(x_0) = u_2(x_0) = 0$, et on supposera de plus que $du_1$ et $du_2$ sont tous deux unitaires en $x_0$, et qu'il ne sont pas égaux ou opposés (en $x_0$).

**3.2.** Exprimer les secondes formes fondamentales de $S_1$ et de $S_2$ en $x_0$ en fonction des hessiens de $u_1$ et $u_2$.

**3.3.** Montrer qu'il existe une application $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$, définie sur un intervalle $I$ de $\mathbf{R}$ contenant 0, telle que $\gamma(I)$ est un voisinage de $x_0$ dans $S_1 \cap S_2$, avec $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(t)$ unitaire pour tout $t \in I$.

**3.4.** Montrer que, pour tout $t \in I$, on a :

$$du_1(\gamma'(t)) = du_2(\gamma'(t)) = 0 \ .$$

**3.5.** Montrer que, pour tout $t \in I$, on a :

$$\mathrm{Hess}(u_1)(\gamma'(t), \gamma'(t)) + du_1(\gamma''(t)) = 0 \ .$$

**3.6.** En déduire une expression de $\langle \gamma''(t), n_1 \rangle$ faisant apparaître la seconde forme fondamentale de $S_1$.

**3.7.** En déduire une expression de $\gamma''(0)$ faisant intervenir les secondes formes fondamentales de $S_1$ et de $S_2$, ainsi que l'angle entre ces surfaces en $x_0$.