Cours de maitrise de math, MMB B2
Notes succintes

20 Septembre 2001

Contents

Chapter 1

Courbes dans $\mathbf{R}^2$

Notations

$\mathbf{R}^2$ muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$. Longueur associée, notée d, etc.

Régularité Sauf mention explicite du contraire, on considère des courbes C^∞. Pour se simplifier la vie, car la plus grande partie du chapitre pourrait se faire avec une régularité moins grande.

1.1 Définitions des courbes

Courbes paramétrés Application régulière $f : I \to \mathbf{R}^2$, dont la dérivée première ne s'annule jamais.

NB Besoin de condition de dérivée non nulle à cause de points singuliers qu'on peut obtenir sans cela !

Courbes géométriques Classes d'équivalences de courbes paramétrées.

NB Pas la même chose que de regarder les images !

Courbes orientées Définies comme courbes paramétrées, modulo changements de paramétrisation qui préservent l'orientation, avec $\overset{+}{\simeq}$. Interprétation géométrique.

Proposition A chaque courbe géométrique correspondent deux courbes orientées.

1.2 Vitesse, tangentes

Vitesse d'une courbe paramétrée. $v(s) = \|f'(s)\|$.

Tangente Unique droite passant par $f(s)$ et dirigée par $f'(s)$.

Vecteur tangent unitaire Deux choix possibles, un seul compatible avec l'orientation pour une courbe orientée. On le note τ

Vecteur normal unitaire On le note ν.

Remarque τ définit une application continue de I dans S^1.

1.3 Courbure

Définition Pour une courbe paramétrée à vitesse 1:

$$k(t) = \langle d\tau(t)/dt, \nu(t)\rangle \ .$$

Signication naturelle car dérivée est dans $\mathbf{R}^2$ donc ok.

Exemple Une courbe dont la courbure est constante égale à 1 est un cercle de rayon 1.

Définition Pour une courbe paramétrée en général :

$$k(t) = \frac{1}{v}\langle d\tau(t)/dt, \nu(t)\rangle \ .$$

Rayon de courbure Inverse de la courbure.

Proposition Si f est paramétrée à vitesse 1, on a en chaque point:

$$f''(t) = k(t)\nu(t) \ .$$

Preuve Par:

$$2\langle f''(t), f'(t)\rangle = \langle f'(t), f'(t)\rangle' = 0 \ ,$$

donc f'' est orthogonal à f'.

Proposition Soit $f : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée à vitesse 1, et soit $t_0 \in I$. On a au voisinage de t_0:

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)v(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}k(t_0)\nu(t_0) + O((t-t_0)^3) \ .$$

Corollaire Interprétation du rayon de courbure en terme de cercle osculateur.

Corollaire Soit $\Delta(t_0)$ la tangente en t_0 à f, notons $\delta(t) := d(f(t), \Delta(t_0))$. Alors:

$$\delta(t) = \frac{|k(t_0)|}{2}(t-t_0)^2 + O((t-t_0)^3) \ .$$

Preuve On a:

$$d(f(t), \Delta(t_0)) = |\langle f(t) - f(t_0), \nu(t_0)\rangle| \ ,$$

et le corollaire suit de la proposition plus haut.

Courbure totale d'une courbe Intégrale de la courbure.

Propriété Indépendant de la paramétrisation choisie, à condition que l'orientation reste la même.

Remarque Change de signe avec l'orientation !

1.4 Un peu de topologie

Motivations On voit apparaitre des applications de S^1 dans S^1 quand on étudie les vecteurs tangents de courbes fermées. On veut les comprendre d'un point de vue **topologique**, c'est à dire aux déformations près. En particulier, on voudrait comprendre quand deux telles applications sont déformables l'une dans l'autre, c'est à dire qu'on veut les classifier à déformations près.

Exemple Donner exemples:

- application identité, degré 1;
- de même mais dans l'autre sens;
- application de degré un qui fait une "boucle";
- application de degré 3;
- de même mais avec une boucle.

Remarquer que le nombre de tours joue un rôle.

1.4.1 Relevés des applications

Définition On note p la projection canonique de $\mathbf{R}$ dans S^1. On a alors le lemme fondamental suivant.

Lemme Soit $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$, $f \in C^\infty([a, b], S^1)$, et $u \in p^{-1}(f(a))$. Il existe une unique application $\overline{f} \in C^\infty(I, \mathbf{R})$ telle que $f = p \circ \overline{f}$ et que $\overline{f}(a) = u$.

DESSIN

(Graphe commutatif pour relèvement de f)

Remarque Notion de dérivée d'une application à valeur dans S^1. C'est un nombre, on le trouve en identifiant $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

Preuve Si $f = p \circ \overline{f}$, alors $f' = \overline{f}'$ en tout point. Donc $\overline{f}$ est uniquement déterminée par intégration.

Remarque Deux relevés diffèrent par une constante, multiple de 2π.

1.4.2 Degré des applications

Degré d'une application de S^1 dans S^1 Soit $f : S^1 \to S^1$. On identifie $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, on applique le lemme précédent, et on obtient une application $\overline{f} : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$. On appelle **degré de** f le nombre:

$$d^\circ f := \frac{\overline{f}(2\pi) - f(0)}{2\pi} \ .$$

Propriété $d^\circ f \in \mathbf{Z}$.

Preuve $f(2\pi) = f(0)$, donc $\overline{f}(2\pi) - \overline{f}(0) \in 2\pi\mathbf{Z}$, qed.

Remarque On aurait pu remplacer 0 par $t \in \mathbf{R}$, et poser:

$$d^\circ f := \frac{\overline{f}(2\pi + t) - f(t)}{2\pi} \ ,$$

le résultat aurait été le même. Ne dépend pas non plus du relevé de f choisi – car les différents relevés diffèrent par une constante additive.

Remarque Si on prend une application périodique d'une période autre que 2π, on a une définition analogue; par exemple, pour $f : \mathbf{R}/L\mathbf{Z} \to \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, on pose:

$$d^\circ f := \frac{\overline{f}(t + L) - \overline{f}(t)}{2\pi} \ .$$

Propriété Une application non surjective f de S^1 dans S^1 est de degré nul.

Preuve Soit $\overline{f} : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ un relevé de f. Soit $\theta \in S^1$ une valeur non atteinte par f. Comme $f(S^1)$ est compacte, son complémentaire est ouvert, donc on peut supposer que $\theta \neq f(0)$. Il existe donc deux réels u, v congrus à θ modulo 2π, avec $u \in]f(0) - 2\pi, f(0)[$ et $v \in]f(0), f(0) + 2\pi[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a $\overline{f}(2\pi) \in [u, v]$, donc $\overline{f}(2\pi) = \overline{f}(0)$ puisque $f(2\pi) = f(0)$. Donc $d^\circ f = 0$.

Remarque Interprétation en terme de nombre d'image réciproques, avec signe.

1.4.3 Homotopies

Définition Soit $c_1, c_2 : S^1 \to S^1$ deux applications régulières. On appelle homotopie de c_1 en c_2 une application régulière:

$$H : [0, 1] \times S^1 \to S^1 \ ,$$

telle que:

$$\begin{aligned} H(0, s) &= c_1(s) \ , \\ H(1, s) &= c_2(s) \ . \end{aligned}$$

On dit alors que c_1 et c_2 sont homotopes.

Remarque Il s'agit donc d'une "déformation" de c_1 en c_2.

1.4.4 Classification

Théorème Les applications de S^1 dans S^1 sont classifiées, à homotopie près, par leur degré.

Traduction Deux applications sont homotopes si et seulement si elles sont le même degré.

Preuve Si H est une homotopie entre c_1 et c_2, alors $H(t, \cdot)$ est une application régulière de S^1 dans S^1. Son degré est une fonction continue de t, à valeur dans $\mathbf{Z}$, donc elle est constante. Donc $d^\circ c_1 = d^\circ c_2$.

Réciproque: soit c_1 et c_2 deux applications de même degré. On les relève en deux applications:

$$\overline{c}_1 : [0, 2\pi] \to \mathbf{R} \ ,$$

$$\overline{c}_2 : [0, 2\pi] \to \mathbf{R} \ .$$

telle que:

$$\overline{c}_1(2\pi) - \overline{c}_1(0) = \overline{c}_2(2\pi) - \overline{c}_2(0) = 2\pi d^\circ c_1 \ .$$

On pose pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $s \in [0, 2\pi]$:

$$\overline{H}(t, s) = t\overline{c}_1(s) + (1 - t)\overline{c}_2(s) \ .$$

On vérifie que $\overline{H}$ est une déformation continue entre $\overline{c}_1$ et $\overline{c}_2$. De plus, pour tout $t \in [0, 1]$, on a:

$$\overline{H}(t, 2\pi) = 2\pi d^\circ c_1 \ .$$

On en déduit par passage au quotient une application:

$$H : [0, 1] \times S^1 \to S^1 \ ,$$

qui est une homotopie entre c_1 et c_2.

1.5 Nombre d'enroulement

Définition Soit $f : S^1 \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée. Le nombre d'enroulement de f est le degré de l'application $\tau : S^1 \to S^1$. Noté enroul(f).

Propriété Indépendant du paramétrage choisi, à condition qu'il préserve l'orientation.

Preuve Le degré est invariant par homotopie !

Définition Pour une courbe orientée, le nombre d'enroulement est défini en choisissant une paramétrisation.

Définition Pour une courbe non orientée, il est défini au signe près.

Propriété Le nombre d'enroulement est invariant par déformation.

Preuve Invariance par homotopie du degré.

Théorème Pour toute courbe fermée paramétrée $f : S^1 \to \mathbf{R}^2$:

$$\int k(s)ds = 2\pi \mathrm{enroul}(f) \ .$$

Preuve On a vu que $k(s)$ est la vitesse (orientée) de variation de $\tau(s)$ par rapport à s. Sur tout intervalle, l'intégrale de $k(s)$ est donc la variation totale de $\tau(s)$. Donc l'intégrale sur S^1 de $k(s)$ est égale à 2π fois le nombre de tours effectués par τ. qed.

Définition Homotopie entre courbes fermées orientées.

Théorème Les courbes fermées orientées sont classifiées, à homotopie près, par leur nombre d'enroulement.

Traduction Deux courbes fermées orientées sont homotopes ssi elles ont le même nombre d'enroulement.

Preuve Si deux courbes sont homotopes, alors elles ont même nombre d'enroulement, par invariance du nombre d'enroulement par déformation.

Réciproquement, soit c_1 et c_2 deux courbes orientées ayant le même nombre d'enroulement n. On veut montrer qu'elles sont homotopes. On note qu'il suffit de montrer le résultat si c_1 et c_2 sont de longueur 2π, sinon on fait une déformation homothétique, etc.

On choisit des paramétrages f_1, f_2 paramétrées à vitesse 1. Quitte à faire des translations, on suppose que $f_1(0) = f_2(0) = 0$. On appelle τ_1, τ_2 les vecteurs unitaires tangents associés, ainsi $d^\circ\tau_1 = d^\circ\tau_2 = n$.

D'après le théorème de classification des applications de S^1 dans S^1, il existe une homotopie $H : [0,1] \times S^1 \to \mathbf{R}^2$ de τ_1 sur τ_2. On pose alors, pour $t \in [0,1]$ et $s \in [0, 2\pi]$:

$$F(t,s) = \int_0^s H(t,u)du - \frac{s}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(t,u)du \ .$$

On note que:

1. F est une application régulière (C^1 ici).

2. On a:

$$\begin{aligned}
F(0,s) &= \int_0^s H(0,u)du - \frac{s}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(0,u)du \\
&= \int_0^s \tau_1(u)du - \frac{s}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tau_1(u)du \\
&= f_1(s) - 0 \\
&= f_1(s) \\
F(1,s) &= \int_0^s H(1,u)du - \frac{s}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(1,u)du \\
&= f_2(s)
\end{aligned}$$

3. Pour tout $t \in [0,1]$, on a:

$$F(t,2\pi) = \int_0^{2\pi} H(t,s)ds - \frac{2\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(t,s)ds = 0 = F(t,0) \ ,$$

   si bien que $F(t,\cdot)$ définit bien une application de S^1 dans S^1.

4. Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $s \in S^1$:

$$\frac{d}{ds}F(t,s) = H(t,s) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(t,u)du \neq 0 \ ,$$

   car $(1/2\pi)\int_0^{2\pi} H(t,u)du$ est un barycentre de points de S^1, donc est dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1.

Donc F est bien une homotopie entre f_1 et f_2.

ADMIS Une courbe fermée simple a pour nombre d'enroulement 1 ou -1.

1.6 Indice d'une courbe par rapport à un point

Définition Soit $f : S^1 \to \mathbf{R}^2$ une application régulière, et soit x_0 un point de $\mathbf{R}^2 \setminus f(S^1)$. On appelle indice de f par rapport à x_0 le degré de l'application:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \to S^1 & \\ s & \mapsto & \dfrac{f(s)-x_0}{\|f(s)-x_0\|} \end{array}$$

On le note $\mathrm{ind}_{x_0} f$.

NB On peut considérer ici les courbes continues, et pas seulement les courbes régulières. La dérivée peut s'annuler.

Propriété Indépendant de la paramétrisation à condition que l'orientation reste la même.

Définition Si c est une courbe fermée orientée, et si $x_0 \notin c$, l'indice de c par rapport à x_0 est défini en choisissant une paramétrisation.

Remarque L'indice est défini pour les applications régulières, et non pas seulement pour les courbes !

Lemme L'indice est invariant par déformation parmi les applications régulières dont l'image ne contient pas x_0.

Preuve Invariance du degré des applications par déformation.

Lemme Soit Ω la composante connexe de x_0 dans $\mathbf{R}^2 \setminus f(S^1)$. Pour tout $x \in \Omega$, on a: $\text{ind}_x f = \text{ind}_{x_0} f$.

Preuve Invariance par déformation encore !

Remarque Supposons qu'il existe une demi-droite issue de x_0 qui ne rencontre pas c. Alors $\text{ind}_{x_0} c = 0$.

Preuve le degré correspondant est 0 car c'est celui d'une application non surjective.

Corollaire S'il existe une courbe continue g issue de x_0 et allant à l'infini sans rencontrer c, alors $\text{ind}_{x_0} c = 0$.

Preuve Pour t assez grand on a $\text{ind}_{g(t)} c = 0$, d'après la remarque précédente. Donc par invariance par déformation on a aussi $\text{ind}_{g(0)} c = 0$.

1.7 Théorème de Jordan

Motivations Montrer que le complémentaire d'une courbe fermée simple est bien comme on le croit. Pas aussi facile qu'on peut l'imaginer – surtout pour une courbe qui est seulement continue, dans ce cas c'est assez subtil ! Mais on se limite ici au cas des courbes régulières, bcp plus facile. On va utiliser des outils topologiques qu'on vient de voir.

Définition Une courbe est **simple** si elle est paramétrée par une application injective.

Théorème Soit c une courbe fermée simple dans $\mathbf{R}^2$. Alors $\mathbf{R}^2 \setminus c$ a exactement deux composantes connexes C_{int} et C_{ext}, avec les propriétés suivantes:

- $\overline{C_{\text{int}}}$ est compact, $\overline{C_{\text{ext}}}$ ne l'est pas;
- pour tout $x \in C_{\text{int}}$, $\text{ind}_x c = \pm 1$;
- pour tout $x \in C_{\text{int}}$, $\text{ind}_x c = 0$.

La preuve est repoussée un peu plus loin.

Lemme Soit $m \in c$, et soient u, v deux points de la normale à c en m, situés de part et d'autre de m et assez proches. Alors:
$$|\text{ind}_u c - \text{ind}_v c| = 1 \ .$$

Preuve Par étapes.
1. Choix d'un petit rectangle R centré sur m, où c est un graphe.
2. Homotopie de c à support dans R, pour remplacer l'intersection de c avec R par un chemin constitué de deux segments "verticaux" dans le bord, et du segment "horizontal" central.
3. On déplace u et v pour qu'ils soient à distance ϵ de m sur la normale – ca ne change pas l'indice. On choisit une paramétrisation de c par $h : S^1 \to \mathbf{R}^2$ telle que le segment central de la boite correspond à $[-1, 1]$.

4. On pose:

$$\begin{aligned} f : t &\mapsto \frac{h(t)-u}{\|h(t)-u\|} \ , \\ g : t &\mapsto \frac{h(t)-v}{\|h(t)-v\|} \ . \end{aligned}$$

On veut montrer que $|d^\circ f - d^\circ g| = 1$. On note que, si ϵ est assez petit, on a: $|f(t) - g(t)| \leq 1/10$ pour $t \notin [-1, 1]$.

5. On note $\overline{f}$ et $\overline{g}$ des relevés de f, g en des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, avec $\overline{f}(x+2\pi) = \overline{f}(x) + 2\pi d^\circ f$, et de même pour g. On les choisit telles que $|\overline{f}(1) - \overline{g}(1)| \leq 1/10$. Alors pour tout $t \in [1, 2\pi - 1]$, $|\overline{f}(t) - \overline{g}(t)| \leq 1/10$.

6. La variation totale de $\overline{f}$ sur $[-1, 1]$ correspond au passage de $-\pi + \alpha$ à $-\alpha$, c'est donc $\pi - 2\alpha$, avec α petit dépendant de ϵ; de même la variation totale de $\overline{g}$ est $2\alpha - \pi$.

7. On ajoute les majorations pour obtenir finalement:

$$|2\pi d^\circ f - 2\pi d^\circ f - 2\pi| \leq 4\alpha + 2/10 \ ,$$

et comme c'est un multiple de 2π, on a $|d^\circ f - d^\circ g - 1| = 0$. qed.

Preuve du théorème de Jordan D'après le lemme précédent, ind$c$ prend au moins deux valeurs différentes, donc $\mathbf{R}^2 \setminus c$ a au moins deux composantes connexes.

On veut montrer qu'elle en a au plus deux. Soit $h : S^1 \to \mathbf{R}^2$ une paramétrisation de c. On définit une application: $\Phi : S^1 \times [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbf{R}^2$, qui à (s, t) associe le point à distance (orientée) t sur la normale (orientée) à c en $h(s)$. C'est une application continue, telle que:

- si ϵ est assez petit:
$$\Phi(S^1 \times]0, \epsilon[) \subset \mathbf{R}^2 \setminus c \ ,$$
$$\Phi(S^1 \times]-\epsilon, 0[) \subset \mathbf{R}^2 \setminus c \ ,$$
- tout point de $\mathbf{R}^2 \setminus c$ assez proche de c est dans $\Phi(S^1 \times]-\epsilon, \epsilon[\setminus \{0\})$.

D'après le premier point et le lemme, $\Phi(S^1 \times]-\epsilon, \epsilon[) \setminus c$ a deux composantes connexes; d'après le second point, toute composante connexe de $\mathbf{R}^2 \setminus c$ doit contenir c dans son adhérence, et donc contenir $\Phi(S^1 \times]0, \epsilon[)$ ou bien $\Phi(S^1 \times]-\epsilon, 0[)$. Donc $\mathbf{R}^2 \setminus c$ a exactement deux composantes connexes, soit $\mathbf{C}_1$ et C_2.

$\overline{C_1}$ et $\overline{C_2}$ ne sont pas toutes deux compactes, car leur réunion est $\mathbf{R}^2$.

Soit R telle que $B(0, R) \supset c$. Alors $\mathbf{R}^2 \setminus B(0, R)$ est contenu dans C_1 ou dans C_2, et ind$c$ y est 0, et cette composante n'est pas compacte. Sur l'autre composante, ind$c = \pm$, donc cette composante est contenue dans $B(0, R)$, et donc elle est d'adhérence compacte.

Définition Aire de l'intérieur de la courbe c. Notée Aire(c).

1.8 Inégalité isopérimètrique

Motivations Outil fondamental (dans un cadre plus général) en géométrie riemannienne. Reviendra (peut-être...) dans la suite sous forme plus générale. Historique intéressant: problème de Didon, etc.

Théorème Soit c une courbe fermée simple régulière, on a:

$$L(c)^2 \geq 4\pi \text{Aire}(c) \ .$$

avec égalité ssi c est un cercle.

Lemme (inégalité de Wirtinger). Soit $f \in C^1(\mathbf{R})$ une fonction 2π-périodique de moyenne nulle, on a:

$$\int_0^{2\pi} f'^2(t)dt \geq \int_0^{2\pi} f^2(t)dt \ ,$$

avec égalité ssi $f(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$.

Preuve $f \in L^2$ donc elle est égale au sens L^2 à sa série de Fourier, et de même pour f', etc.

Preuve de l'inégalité isopérimètrique On se ramène par homothétie à une courbe de longueur 2π, avec une paramétrisation à vitesse constante $h : S^1 \to \mathbf{R}^2$. On se ramène par une translation au cas où 0 est le centre de gravité de c, i.e. si $h = (f, g)$, on a:

$$\int f = \int g = 0 \ .$$

Comme on a paramétrisation à vitesse 1, on a:

$$\int f'^2 + g'^2 = 2\pi = L(c) \ ,$$

alors que:

$$\mathrm{Aire}(c) = \int f(t)g'(t)dt \ .$$

Donc:

$$2(\pi - \mathrm{Aire}(c)) = \int f'^2 + g'^2 - 2fg'dt = \int (f'^2 - f^2)dt + \int (f - g')^2 dt \ .$$

Mais d'après le lemme, la première intégrale est positive, donc $2\pi - 2\mathrm{Aire}(c) \geq 0$.

Le cas d'égalité correspond à un cercle paramétré à vitesse 1.

1.9 Convexité

Théorème Soit c une courbe fermée simple dans $\mathbf{R}^2$. Il y a égalité entre:

1. k garde un signe constant, i.e. $k \leq 0$ partout ou $k \geq 0$ partout;
2. $\int_c |k| = 2\pi$;
3. c reste d'un seul coté de chacune de ses tangentes;
4. deux points de l'intérieur de c sont joints par un segment dans C_{int}.

Définition Une courbe vérifiant ces propriétés est dite **convexe**.

Preuve (1) $\mapsto$ (2): évident puisque $\int k = \pm 2\pi$.

(2) $\mapsto$ (1): de même, car le nombre d'enroulement est ± 1.

(1) $\mapsto$ (3): on se donne une paramétrisation f de c. (1) et (2) impliquent que τ parcourt une fois S^1, et que chaque point de S^1 est atteint pour un unique point de c. On suppose qu'il existe deux points p, q qui sont de part et d'autre de la tangente Δ_m à $m \in c$. On considère une normale unitaire n à c en m, et la fonction:

$$\begin{array}{rrl} h: & S^1 \to & \mathbf{R} \\ & s \mapsto & \langle f(t) - m, n \rangle \ . \end{array}$$

Alors f prend des valeurs positives et negatives (cf. p, q), donc un max > 0 et un min < 0, et donc 3 points critiques (avec m). Ceci contredit le fait que n et $-n$ sont atteints chacun une fois au plus.

$(3) \mapsto (4)$: On fixe $x \in C_{\text{int}}$, et on note Ω_x l'ensemble des points de C_{int} qui sont joints par un segments géodésique dans C_{int}. Soit $y \in \partial\Omega_x$, et soit Δ la droite passant par x et y, alors Δ doit être tangente à c entre x et y, du coté de C_{int}. Puis même argument que plus haut avec normale unitaire pour montrer qu'il existe un point où la tangente est du coté de C_{ext}.

$(4) \mapsto (1)$: On montre la contraposée. On suppose donc que, au voisinage de m, c est le graphe d'une fonction f avec $f(s) = 0$ pour $s \in [0, l]$, $f''(s) \geq 0$ pour $s \geq l$, et $f''(s) \leq 0$ pour $s \leq 0$, sur $[-\epsilon, l + \epsilon]$. On suppose (sans perte de généralité) que C_{int} est en-dessous du graphe. On choisit $a \in [0, \epsilon]$, et $b > 0$ très petit.

On considère les points $m_+ = (l + a, f(l + a) - b)$ et $m_- = (l, -b)$, on remarque qu'ils sont dans C_{int} pour b assez petit. On va montrer que le segment qui les joint rencontre C_{ext}. C'est le graphe d'une fonction g, on considère $f - g$, on a:

$$(f-g)(l) = (f-g)(l+a) = b$$
$$(f-g)'' \geq 0 \quad \text{sur} \quad [l, l+a]$$

Donc $f - g < 0$ entre l et $l + a$ si b est assez petit, donc $[m_-, m_+]$ rencontre C_{ext}.

Bibliography

[BG93] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces.* Presses universitaires de France, 1993.

[dC76] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.

[GHL87] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian Geometry.* Springer, 1987.

[Sed94] V.D. Sedykh. Four vertices of a convex space curve. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 26:177–180, 1994.