# Cours de maitrise de math, MMB B2 Notes succintes

20 Septembre 2001

# Contents

	0.1 0.2 0.3 0.4	Présentation	3 3 4 4
1	Cou	${f r}$ bes dans ${f R}^2$	5
	1.1	Définitions des courbes	5
	1.2	Vitesse, tangentes	5
	1.3	Courbure	6
	1.4	Un peu de topologie	6
		1.4.1 Relevés des applications	7
		1.4.2 Degré des applications	7
		1.4.3 Homotopies	8
		1.4.4 Classification	8
	1.5	Nombre d'enroulement	8
	1.6	Indice d'une courbe par rapport à un point	10
	1.7	Théorème de Jordan	11
	1.8	Inégalité isopérimètrique	12
	1.9	Convexité	13
	$\boldsymbol{\alpha}$	1. 1 D3	- 4
2			14
2	2.1	Définitions des courbes	14
2	$2.1 \\ 2.2$	Définitions des courbes	$\frac{14}{14}$
2	$2.1 \\ 2.2 \\ 2.3$	Définitions des courbes	14 14 15
2	2.1 2.2 2.3 2.4	Définitions des courbes	14 14 15 15
2	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5	Définitions des courbes	14 14 15 15 16
2	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6	Définitions des courbes	14 14 15 15 16 18
2	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5	Définitions des courbes	14 14 15 15 16
	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7	Définitions des courbes Repère de Serret-Frénet Formules de Frénet Théorème fondamental Le théorème de Fenchel Noeuds Le théorème de Fairy-Milnor	14 14 15 15 16 18
3	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7	Définitions des courbes Repère de Serret-Frénet Formules de Frénet Théorème fondamental Le théorème de Fenchel Noeuds Le théorème de Fairy-Milnor Forie locale des surfaces dans R <sup>3</sup>	14 14 15 15 16 18 18
	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7	Définitions des courbes Repère de Serret-Frénet Formules de Frénet Théorème fondamental Le théorème de Fenchel Noeuds Le théorème de Fairy-Milnor Forie locale des surfaces dans R <sup>3</sup> Définitions des surfaces	14 14 15 15 16 18 18
	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 <b>Thé</b> 3.1 3.2	Définitions des courbes Repère de Serret-Frénet Formules de Frénet Théorème fondamental Le théorème de Fenchel Noeuds Le théorème de Fairy-Milnor Forie locale des surfaces dans R <sup>3</sup> Définitions des surfaces Applications régulières	14 14 15 15 16 18 18 19
	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 <b>Thé</b> 3.1 3.2 3.3	Définitions des courbes Repère de Serret-Frénet Formules de Frénet Théorème fondamental Le théorème de Fenchel Noeuds Le théorème de Fairy-Milnor  Forie locale des surfaces dans R <sup>3</sup> Définitions des surfaces Applications régulières Connection dans R <sup>3</sup>	14 14 15 15 16 18 18 19 19
	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 <b>Thé</b> 3.1 3.2	Définitions des courbes Repère de Serret-Frénet Formules de Frénet Théorème fondamental Le théorème de Fenchel Noeuds Le théorème de Fairy-Milnor  Forie locale des surfaces dans R <sup>3</sup> Définitions des surfaces Applications régulières Connection dans R <sup>3</sup> Vecteurs tangents	14 14 15 15 16 18 18 19 19 19 20
	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 <b>Thé</b> 3.1 3.2 3.3 3.4	Définitions des courbes Repère de Serret-Frénet Formules de Frénet Théorème fondamental Le théorème de Fenchel Noeuds Le théorème de Fairy-Milnor  Forie locale des surfaces dans R <sup>3</sup> Définitions des surfaces Applications régulières Connection dans R <sup>3</sup> Vecteurs tangents Métrique induite	14 14 15 15 16 18 18 19 19
	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 <b>Thé</b> 3.1 3.2 3.3 3.4 3.5	Définitions des courbes Repère de Serret-Frénet Formules de Frénet Théorème fondamental Le théorème de Fenchel Noeuds Le théorème de Fairy-Milnor  Forie locale des surfaces dans R <sup>3</sup> Définitions des surfaces Applications régulières Connection dans R <sup>3</sup> Vecteurs tangents Métrique induite Invariants locaux	14 14 15 15 16 18 18 19 19 20 20
	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 <b>Thé</b> 3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 3.6	Définitions des courbes Repère de Serret-Frénet Formules de Frénet Théorème fondamental Le théorème de Fenchel Noeuds Le théorème de Fairy-Milnor  Forie locale des surfaces dans R Définitions des surfaces Applications régulières Connection dans R Vecteurs tangents Métrique induite Invariants locaux Connexion sur S	14 14 15 15 16 18 18 19 19 20 20 21
	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 <b>Thé</b> 3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 3.6 3.7	Définitions des courbes Repère de Serret-Frénet Formules de Frénet Théorème fondamental Le théorème de Fenchel Noeuds Le théorème de Fairy-Milnor $\mathbf{corie}$ locale des surfaces dans $\mathbf{R}^3$ Définitions des surfaces Applications régulières Connection dans $\mathbf{R}^3$ Vecteurs tangents Métrique induite Métrique induite Invariants locaux Connexion sur $S$ Géodésiques Géodésiques	14 14 15 15 16 18 19 19 20 20 21 22

4	Surfaces spéciales	
-	4.1 Surfaces réglées et développables	
	4.2 Fonctions sur une surface	
	4.3 Déformations de surfaces	
	4.4 Surfaces minimales	
	4.5 Surfaces à courbure moyenne constante	
5	Le théorème de Gauss-Bonnet	
	5.1 Surfaces abstraites, variétés	
	5.2 Triangulations	
	5.3 Formes différentielles	
	5.4 Lemme de Sard	
	0 11	
	5.6 Gauss-Bonnet dans $\mathbb{R}^3$	
	5.7 Gauss-Bonnet polygonal	
	5.8 Gauss-Bonnet intrinsèque	
6	Géométrie intrinsèque des surfaces	
	6.1 Coordonnées	
	6.2 Champs de Jacobi	
	6.3 Géodésiques	
	6.4 Surfaces à courbure positive	
	6.5 Surfaces à courbure négative	

# Chapter 2

# Courbes dans $\mathbb{R}^3$

#### Objectifs:

- définitions etc.
- géométrie locale : courbure, torsion, etc.
- théorème fondamental : la courbure et la torsion permettent de reconstruire la courbe.
- théorème de Fenchel : intégrale de courbure  $\geq 2\pi$ .
- courbes nouées. Un peu de topologie.
- théorème de Fairy-Milnor : les courbes nouées ont une intégrale de courbure au moins  $4\pi$ .

## 2.1 Définitions des courbes

**Définition** Courbes paramétrées, géométriques, orientées, etc.

**Définition** Tangente à une courbe en un point, vecteur tangent unitaire.

# 2.2 Repère de Serret-Frénet

**Définition** Soit  $f: I \to \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée à vitesse 1. La courbure de f en s est k(s) := ||f''(s)||.

**NB**  $k(s) \in \mathbf{R}_+$ , différent des courbes dans  $\mathbf{R}^2$ !

NB invariant par changement d'orientation.

**Définition** Si  $k(s) \neq 0$ , on appelle vecteur normal à f en s le vecteur unitaire dans la direction de f''(s). Noté n(s).

**Rappel** Produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition** Si  $k(s) \neq 0$ , on note t(s) := f'(s), et  $b(s) := t(s) \land n(s)$ . b(s) est le vecteur **binormal**.

**Propriété** Pour  $k(s) \neq 0$ , (t(s), n(s), b(s)) forment un trièdre orthonormé, le trièdre de Frénet.

**Remarque** b'(s) est orthogonal à b(s) et à t(s). En effet :

- $-\langle b', b \rangle = 0 \text{ par } ||b|| = 1.$
- $-b' = (t \wedge n)' = t' \wedge n + t \wedge n' = t \wedge n'$ , car t' = f'' = kn, donc  $b' \perp t$ .

**Définition** Lorsque  $k \neq 0$ , le nombre  $\tau(s)$  défini :

$$b'(s) = \tau(s)n(s)$$

est la torsion de f en s.

**Définition** Pour  $k \neq 0$ , le plan engendré par t(s) et n(s) est le plan osculateur à f en s.

Interprétations par le comportement de la courbe, à l'ordre trois, par rapport à son plan osculateur (utiliser un développement limité).

### 2.3 Formules de Frénet

**Lemme** En tout point  $s \in I$ , on a :

$$\begin{cases} t' &= kn \\ n' &= -kt - \tau b \\ b' &= \tau n \end{cases}$$

**Preuve** On a (1) et (3) par construction. On note que  $n = b \wedge t$ , donc:

$$n' = b' \wedge t + b \wedge t'$$

$$= (\tau n \wedge t) + b \wedge (kn)$$

$$= -\tau b - kt ,$$

donc (2).

#### Vocabulaire

 $-\,$  plan osculateur : engendré par t,n.

- plan rectificateur : par t, b.

- plan normal : par b, n.

### 2.4 Théorème fondamental

Théorème fondamental de la théorie locale des courbes Soit I un intervalle de  $\mathbf{R}$ ,  $k: I \to \mathbf{R}_+^*$  et  $\tau: I \to \mathbf{R}$ . Il existe une courbe f paramétrée à vitesse 1 dont la courbure est k et la torsion  $\tau$ . f est unique aux isométries globales de  $\mathbf{R}^3$  près.

NB Unicité – cad on peut faire un déplacement pour envoyer une solution sur une autre.

**Preuve** Existence : par existence des solutions aux ODE – à vérifier pour ceux qui connaissent. Unicité : on suppose donnés  $f, \overline{f}$  deux solutions, avec  $t(0) = \overline{t}(0)$ , etc. Alors :

$$\begin{split} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|t-\overline{t}\|^2+\|n-\overline{n}\|^2+\|b-\overline{b}\|^2) &=& \langle t-\overline{t},t'-\overline{t}'\rangle+\langle n-\overline{n},n'-\overline{n}'\rangle+\langle b-\overline{b},b'-\overline{b}'\rangle\\ &=& k\langle t-\overline{t},n-\overline{n}\rangle+\tau\langle b-\overline{b},n-\overline{n}\rangle-k\langle n-\overline{n},t-\overline{t}\rangle-\tau\langle n-\overline{n},b-\overline{b}\rangle\\ &=& 0 \end{split}$$

NB Pas vrai pour les courbes fermées – car la courbe qu'on "reconstruit" ne se referme pas en général.

## 2.5 Le théorème de Fenchel

**Théorème** Soit  $f: S^1 \to \mathbf{R}^3$  une courbe fermée. Alors :

$$\int_{S^1} k \ge 2\pi \ ,$$

avec égalité ssi f est une courbe plane convexe.

#### Remarque

– pour une courbe paramétrée à vitesse 1,  $f: \mathbf{R}/L\mathbf{Z}$ , on a :

$$\int_{S^1} k = \int_0^L k(s) ds .$$

- Cas d'égalité clair dans le cas des courbes planes.
- Preuve repoussée après une petite introduction à la théorie des surfaces anticipation sur la suite.

Aire des domaines de  $S^2$  Soit  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  ouvert à bord régulier par morceaux, et soit  $f: \Omega \to S^2$  un difféo local injectif préservant l'orientation. On définit :

$$Aire(f) = \int_{\Omega} \langle \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}, f \rangle dx dy .$$

Alors Aire(f) ne dépend que de l'image  $f(\Omega)$ .

**Preuve** On se donne un autre couple  $(\overline{\Omega}, \overline{f})$  avec  $\overline{f}(\overline{\Omega}) = f(\Omega)$ . On pose  $h = f \circ \overline{f}^{-1} : \Omega \to \overline{\Omega}$ . Alors  $f = \overline{f} \circ h$ . En chaque point de  $f(\Omega)$  on choisit un repère orthonormé (u(m), v(m)) de  $f(m)^{\perp} = T_m S^2$ . On appelle M(x, y) la matrice de  $d_{(x,y)}f$  dans les bases  $(e_1, e_2)$  et (u, v). Alors :

$$\det(M(x,y)) = \langle \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}, f \rangle .$$

et donc:

Aire(f) = 
$$\int_{\Omega} \langle \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}, f \rangle dx dy$$
$$= \int_{\Omega} \det(M(x, y)) dx dy$$

On note de même  $\overline{M}$  la matrice pour  $\overline{f}$ , et N la matrice jacobienne de h. Alors  $M(x,y)=\overline{M}(h(x,y))N(x,y)$ . Donc :

$$\begin{split} \operatorname{Aire}(f) &= \int_{\Omega} \det(M(x,y)) dx dy \\ &= \int_{\Omega} \det(\overline{M}(h(x,y))) \det(N(x,y)) dx dy \\ &= \int_{\overline{\Omega}} \det(\overline{M}(h(x,y))) dx dy \\ &= \int_{\overline{\Omega}} \langle \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \overline{f}}{\partial y}, \overline{f} \rangle \\ &= \operatorname{Aire}(\overline{f}) \;. \end{split}$$

**Définition** On pose  $Aire(f(\Omega)) := Aire(f)$ .

**Preuve du théorème de Fenchel** On considère  $f: \mathbf{R}/L\mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$ . Il suffit de montrer le théorème dans le cas où k ne s'annule qu'en un nombre fini de points (sinon perturbation).

Tube autour de f, donné par :

$$X(s,\theta) = f(s) - \epsilon(n\cos\theta + b\sin\theta) .$$

Bien défini en dehors des points isolés où k=0. On appelle  $N(s,\theta)$  la normale intérieure au tube, cad que  $N(s,\theta)=b\sin\theta+n\cos\theta$ .

On note:

$$\begin{split} T &= X(\mathbf{R}/L\mathbf{Z}, S^1) \ , \\ R &= X(\mathbf{R}/L\mathbf{Z}, ] - \pi/2, \pi/2[) \ , \\ \overline{R} &= X(\mathbf{R}/L\mathbf{Z}, [-\pi/2, \pi/2]) \ , \\ S &= X(\mathbf{R}/L\mathbf{Z}, [\pi/2, 3\pi/2]) \ , \end{split}$$

La preuve repose sur les propositions suivantes, qui impliquent la partie inégalité du théorème.

**Proposition 1** L'application  $N: \overline{R} \to S^2$  est surjective.

**Proposition 2** Aire $(N(\overline{R})) = 2 \int_0^L k(s) ds$ . La preuve de la proposition 1 repose sur le :

**Lemme** Si  $\epsilon$  est assez petit, alors, aux points de R, R reste d'un seul coté de son plan tangent. Aux points de S, S rencontre son plan tangent le long de courbes.

**Preuve** On calcule le comportement de X par rapport à son plan tangent. Calcul explicite du produit scalaire avec N des dérivées secondes de X par rapport à  $s, \theta$ . Calcul du déterminant :

$$\det M(s,\theta) = \epsilon(1 + \epsilon k \cos \theta) k \cos \theta.$$

Donc M est définie positive lorsque  $\cos \theta > 0$ , et définie négative quand  $\cos \theta < 0$ .

**Preuve de la proposition 1** Soit  $N_0 \in S^2$ . On veut montrer qu'il existe  $(s, \theta) \in \overline{R}$  telle que la normale intérieure à X en  $(s, \theta)$  est  $N_0$ . Pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , on considère :

$$P_t := \{ m \in \mathbf{R}^3 \mid \langle m, N_0 \rangle = t \} .$$

Puis  $t_0$  est l'inf des t tels que intersection non nulle avec T, et on vérifie que ok.

Preuve de la proposition 2 On a :

$$N(s,\theta) = \cos(\theta)n + \sin(\theta)b ,$$
  
$$\partial_s N \wedge \partial_\theta N = k \cos \theta N ,$$
  
$$\langle \partial_s N \wedge \partial_\theta N, N \rangle = k \cos \theta .$$

Donc par définition de l'aire :

$$Aire(N(R)) = \int_0^L k(s) \cos \theta d\theta ds = 2 \int_0^L k(s) ds .$$

Cas d'égalité dans le théorème Pour le cas d'égalité, il suffit de montrer que, si l'image de f n'est pas planaire, alors  $N_{|R}$  n'est pas injective. Or si f n'est pas planaire, il existe un plan (orienté) P que f traverse 4 fois au moins. On note  $P_t$  les parallèles à P à distance (orientée) t. On considère les deux segments (au moins) de  $\text{Im} f \setminus P$  qui sont au-dessus de P, et les valeurs maxima des valeurs de t atteintes, soit  $t_1$  et  $t_2$ , atteintes en  $s_1$  et  $s_2$ . On suppose que les  $P_{t_i}$  ne sont pas les plans osculateurs de t maxima – sinon on modifie un peu t.

On vérifie alors que la normale orientée à P est dans  $N(s_1, |-\pi/2, \pi/2|)$  et  $N(s_2, |-\pi/2, \pi/2|)$ .

## 2.6 Noeuds

**Définition** Soit c une courbe fermée plongée dans  $\mathbf{R}^3$ . c est non nouée s'il existe un plongement  $\phi: D^2 \to \mathbf{R}^3$ , telle que  $\phi(\partial D^2) = c$ . Sinon elle est nouée.

**Lemme** Soit  $(c_t)_{t \in [0,1]}$  une famille à un paramètre de courbe fermées plongées.  $c_1$  est nouée si et seulement si  $c_0$  l'est.

**Admis** (on peut expliquer l'heuristique).

# 2.7 Le théorème de Fairy-Milnor

**Théorème** Soit c une courbe plongée nouée dans  $\mathbb{R}^3$ . Si c est nouée, alors l'intégrale de sa courbure est au moins  $4\pi$ .

**Preuve** On suppose que l'intégrale de la courbure de c est inférieure à  $4\pi$ . On reprend le cadre de la démonstration du théorème de Fenchel, on voit qu'il existe un élément de  $N_0 \in S^2$  dont un voisinage dans  $S^2$  est atteint une seule fois par  $N_{|R}$ , et on note  $P_0$  le plan orienté dont la normale est  $N_0$ . D'après le raisonnement précédent, les parallèles  $P_t$  à  $P_0$  rencontrent c en deux points au plus.

On change la paramétrisation de c et on effectue un déplacement et une homothétie, pour obtenir une paramétrisation de la forme :

$$f: S^1 \to \mathbf{R}^3$$
  
 $\theta \mapsto (x(\theta), y(\theta), \sin \theta))$ 

Pour  $z \in [-1, 1]$ , on pose :

$$m_+(z) = (x(\arcsin(z)), y(\arcsin(z))), m_-(z) = (x(\pi - \arcsin(z)), y(\pi - \arcsin(z)))$$
.

On définit alors  $\phi$  par :

$$\begin{split} f: & D^2 \to & \mathbf{R}^3 \\ & (X,Z) \mapsto & \left( \frac{\sqrt{1-Z^2}-X}{2\sqrt{1-Z^2}} m_-(Z) + \frac{\sqrt{1-Z^2}+X}{2\sqrt{1-Z^2}} m_+(Z), Z \right) \; . \end{split}$$

On note que  $\phi$  est un plongement du disque dont les valeurs aux bords sont les points de c. q.e.d.

 ${f NB}~$  traitement spécial pour les points maximaux et minimaux de Z sur  $D^2,$  à préciser à la fin de la preuve.

# Bibliography

- [BG93] M. Berger and B. Gostiaux. Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces. Presses universitaires de France, 1993.
- [dC76] Manfredo P. do Carmo. Differential geometry of curves and surfaces. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.
- [GHL87] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. Riemannian Geometry. Springer, 1987.
- [Sed94] V.D. Sedykh. Four vertices of a convex space curve. Bull. Lond. Math. Soc., 26:177–180, 1994.