# Cours de maitrise de math, MMB B2
# Notes succintes

20 Septembre 2001

# Contents

# Chapter 2

# Courbes dans $\mathbf{R}^3$

Objectifs :
- définitions etc.
- géométrie locale : courbure, torsion, etc.
- théorème fondamental : la courbure et la torsion permettent de reconstruire la courbe.
- théorème de Fenchel : intégrale de courbure $\geq 2\pi$.
- courbes nouées. Un peu de topologie.
- théorème de Fairy-Milnor : les courbes nouées ont une intégrale de courbure au moins $4\pi$.

## 2.1 Définitions des courbes

**Définition** Courbes paramétrées, géométriques, orientées, etc.

**Définition** Tangente à une courbe en un point, vecteur tangent unitaire.

## 2.2 Repère de Serret-Frénet

**Définition** Soit $f : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe paramétrée à vitesse 1. La courbure de $f$ en $s$ est $k(s) := \|f''(s)\|$.

**NB** $k(s) \in \mathbf{R}_+$, différent des courbes dans $\mathbf{R}^2$ !

**NB** invariant par changement d'orientation.

**Définition** Si $k(s) \neq 0$, on appelle vecteur normal à $f$ en $s$ le vecteur unitaire dans la direction de $f''(s)$. Noté $n(s)$.

**Rappel** Produit vectoriel dans $\mathbf{R}^3$.

**Définition** Si $k(s) \neq 0$, on note $t(s) := f'(s)$, et $b(s) := t(s) \wedge n(s)$. $b(s)$ est le vecteur **binormal**.

**Propriété** Pour $k(s) \neq 0$, $(t(s), n(s), b(s))$ forment un trièdre orthonormé, le trièdre de Frénet.

**Remarque** $b'(s)$ est orthogonal à $b(s)$ et à $t(s)$. En effet :
- $\langle b', b\rangle = 0$ par $\|b\| = 1$.
- $b' = (t \wedge n)' = t' \wedge n + t \wedge n' = t \wedge n'$, car $t' = f'' = kn$, donc $b' \perp t$.

**Définition** Lorsque $k \neq 0$, le nombre $\tau(s)$ défini :

$$b'(s) = \tau(s)n(s)$$

est la torsion de $f$ en $s$.

**Définition** Pour $k \neq 0$, le plan engendré par $t(s)$ et $n(s)$ est le plan osculateur à $f$ en $s$.

**Interprétations** par le comportement de la courbe, à l'ordre trois, par rapport à son plan osculateur (utiliser un développement limité).

## 2.3 Formules de Frénet

**Lemme** En tout point $s \in I$, on a :

$$\begin{cases} t' &= kn \\ n' &= -kt - \tau b \\ b' &= \tau n \end{cases}$$

**Preuve** On a (1) et (3) par construction. On note que $n = b \wedge t$, donc :

$$\begin{aligned} n' &= b' \wedge t + b \wedge t' \\ &= (\tau n \wedge t) + b \wedge (kn) \\ &= -\tau b - kt \ , \end{aligned}$$

donc (2).

**Vocabulaire**
- plan osculateur : engendré par $t, n$.
- plan rectificateur : par $t, b$.
- plan normal : par $b, n$.

## 2.4 Théorème fondamental

**Théorème fondamental de la théorie locale des courbes** Soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $k : I \to \mathbf{R}_+^*$ et $\tau : I \to \mathbf{R}$. Il existe une courbe $f$ paramétrée à vitesse 1 dont la courbure est $k$ et la torsion $\tau$. $f$ est unique aux isométries globales de $\mathbf{R}^3$ près.

**NB** Unicité – cad on peut faire un déplacement pour envoyer une solution sur une autre.

**Preuve** Existence : par existence des solutions aux ODE – à vérifier pour ceux qui connaissent.
Unicité : on suppose donnés $f, \overline{f}$ deux solutions, avec $t(0) = \overline{t}(0)$, etc. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|t-\overline{t}\|^2 + \|n-\overline{n}\|^2 + \|b-\overline{b}\|^2) &= \langle t-\overline{t}, t'-\overline{t}'\rangle + \langle n-\overline{n}, n'-\overline{n}'\rangle + \langle b-\overline{b}, b'-\overline{b}'\rangle \\ &= k\langle t-\overline{t}, n-\overline{n}\rangle + \tau\langle b-\overline{b}, n-\overline{n}\rangle - k\langle n-\overline{n}, t-\overline{t}\rangle - \tau\langle n-\overline{n}, b-\overline{b}\rangle \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

**NB** Pas vrai pour les courbes fermées – car la courbe qu'on "reconstruit" ne se referme pas en général.

## 2.5 Le théorème de Fenchel

**Théorème** Soit $f : S^1 \to \mathbf{R}^3$ une courbe fermée. Alors :

$$\int_{S^1} k \geq 2\pi \ ,$$

avec égalité ssi $f$ est une courbe plane convexe.

**Remarque**

- pour une courbe paramétrée à vitesse 1, $f : \mathbf{R}/L\mathbf{Z}$, on a :

$$\int_{S^1} k = \int_0^L k(s)ds \ .$$

- Cas d'égalité clair dans le cas des courbes planes.
- Preuve repoussée après une petite introduction à la théorie des surfaces — anticipation sur la suite.

**Aire des domaines de $S^2$** Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ouvert à bord régulier par morceaux, et soit $f : \Omega \to S^2$ un difféo local injectif préservant l'orientation. On définit :

$$\mathrm{Aire}(f) = \int_\Omega \langle \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}, f \rangle dxdy \ .$$

Alors $\mathrm{Aire}(f)$ ne dépend que de l'image $f(\Omega)$.

**Preuve** On se donne un autre couple $(\overline{\Omega}, \overline{f})$ avec $\overline{f}(\overline{\Omega}) = f(\Omega)$. On pose $h = f \circ \overline{f}^{-1} : \Omega \to \overline{\Omega}$. Alors $f = \overline{f} \circ h$. En chaque point de $f(\Omega)$ on choisit un repère orthonormé $(u(m), v(m)$ de $f(m)^\perp = T_m S^2$. On appelle $M(x,y)$ la matrice de $d_{(x,y)}f$ dans les bases $(e_1, e_2)$ et $(u,v)$. Alors :

$$\det(M(x,y)) = \langle \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}, f \rangle \ .$$

et donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Aire}(f) &= \int_\Omega \langle \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}, f \rangle dxdy \\ &= \int_\Omega \det(M(x,y)) dxdy \end{aligned}$$

On note de même $\overline{M}$ la matrice pour $\overline{f}$, et $N$ la matrice jacobienne de $h$. Alors $M(x,y) = \overline{M}(h(x,y))N(x,y)$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Aire}(f) &= \int_\Omega \det(M(x,y)) dxdy \\ &= \int_\Omega \det(\overline{M}(h(x,y))) \det(N(x,y)) dxdy \\ &= \int_{\overline{\Omega}} \det(\overline{M}(h(x,y))) dxdy \\ &= \int_{\overline{\Omega}} \langle \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \overline{f}}{\partial y}, \overline{f} \rangle \\ &= \mathrm{Aire}(\overline{f}) \ . \end{aligned}$$

**Définition** On pose $\mathrm{Aire}(f(\Omega)) := \mathrm{Aire}(f)$.

**Preuve du théorème de Fenchel** On considère $f : \mathbf{R}/L\mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$. Il suffit de montrer le théorème dans le cas où $k$ ne s'annule qu'en un nombre fini de points (sinon perturbation).

Tube autour de $f$, donné par :

$$X(s,\theta) = f(s) - \epsilon(n\cos\theta + b\sin\theta) .$$

Bien défini en dehors des points isolés où $k = 0$. On appelle $N(s,\theta)$ la normale intérieure au tube, cad que $N(s,\theta) = b\sin\theta + n\cos\theta$.

On note :

$$\begin{aligned} T &= X(\mathbf{R}/L\mathbf{Z}, S^1) , \\ R &= X(\mathbf{R}/L\mathbf{Z}, ]-\pi/2, \pi/2[) , \\ \overline{R} &= X(\mathbf{R}/L\mathbf{Z}, [-\pi/2, \pi/2]) , \\ S &= X(\mathbf{R}/L\mathbf{Z}, ]\pi/2, 3\pi/2[) , \end{aligned}$$

La preuve repose sur les propositions suivantes, qui impliquent la partie inégalité du théorème.

**Proposition 1** L'application $N : \overline{R} \to S^2$ est surjective.

**Proposition 2** $\text{Aire}(N(\overline{R})) = 2\int_0^L k(s)ds$.

La preuve de la proposition 1 repose sur le :

**Lemme** Si $\epsilon$ est assez petit, alors, aux points de $R$, $R$ reste d'un seul coté de son plan tangent. Aux points de $S$, $S$ rencontre son plan tangent le long de courbes.

**Preuve** On calcule le comportement de $X$ par rapport à son plan tangent. Calcul explicite du produit scalaire avec $N$ des dérivées secondes de $X$ par rapport à $s, \theta$. Calcul du déterminant :

$$\det M(s,\theta) = \epsilon(1 + \epsilon k\cos\theta)k\cos\theta .$$

Donc $M$ est définie positive lorsque $\cos\theta > 0$, et définie négative quand $\cos\theta < 0$.

**Preuve de la proposition 1** Soit $N_0 \in S^2$. On veut montrer qu'il existe $(s,\theta) \in \overline{R}$ telle que la normale intérieure à $X$ en $(s,\theta)$ est $N_0$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on considère :

$$P_t := \{m \in \mathbf{R}^3 \mid \langle m, N_0\rangle = t\} .$$

Puis $t_0$ est l'inf des $t$ tels que intersection non nulle avec $T$, et on vérifie que ok.

**Preuve de la proposition 2** On a :

$$N(s,\theta) = \cos(\theta)n + \sin(\theta)b ,$$

$$\partial_s N \wedge \partial_\theta N = k\cos\theta N ,$$

$$\langle \partial_s N \wedge \partial_\theta N, N\rangle = k\cos\theta .$$

Donc par définition de l'aire :

$$\text{Aire}(N(R)) = \int_0^L k(s)\cos\theta d\theta ds = 2\int_0^L k(s)ds .$$

**Cas d'égalité dans le théorème** Pour le cas d'égalité, il suffit de montrer que, si l'image de $f$ n'est pas planaire, alors $N_{|R}$ n'est pas injective. Or si $f$ n'est pas planaire, il existe un plan (orienté) $P$ que $f$ traverse 4 fois au moins. On note $P_t$ les parallèles à $P$ à distance (orientée) $t$. On considère les deux segments (au moins) de $\text{Im}f \setminus P$ qui sont au-dessus de $P$, et les valeurs maxima des valeurs de $t$ atteintes, soit $t_1$ et $t_2$, atteintes en $s_1$ et $s_2$. On suppose que les $P_{t_i}$ ne sont pas les plans osculateurs de $\text{Im}f$ aux maxima – sinon on modifie un peu $P$.

On vérifie alors que la normale orientée à $P$ est dans $N(s_1, ]-\pi/2, \pi/2[)$ et $N(s_2, ]-\pi/2, \pi/2[)$.

## 2.6 Noeuds

**Définition** Soit $c$ une courbe fermée plongée dans $\mathbf{R}^3$. $c$ est non nouée s'il existe un plongement $\phi$ : $D^2 \to \mathbf{R}^3$, telle que $\phi(\partial D^2) = c$. Sinon elle est nouée.

**Lemme** Soit $(c_t)_{t\in[0,1]}$ une famille à un paramètre de courbe fermées plongées. $c_1$ est nouée si et seulement si $c_0$ l'est.

**Admis** (on peut expliquer l'heuristique).

## 2.7 Le théorème de Fairy-Milnor

**Théorème** Soit $c$ une courbe plongée nouée dans $\mathbf{R}^3$. Si $c$ est nouée, alors l'intégrale de sa courbure est au moins $4\pi$.

**Preuve** On suppose que l'intégrale de la courbure de $c$ est inférieure à $4\pi$. On reprend le cadre de la démonstration du théorème de Fenchel, on voit qu'il existe un élément de $N_0 \in S^2$ dont un voisinage dans $S^2$ est atteint une seule fois par $N_{|R}$, et on note $P_0$ le plan orienté dont la normale est $N_0$. D'après le raisonnement précédent, les parallèles $P_t$ à $P_0$ rencontrent $c$ en deux points au plus.

On change la paramétrisation de $c$ et on effectue un déplacement et une homothétie, pour obtenir une paramétrisation de la forme :

$$\begin{array}{rrl} f: & S^1 \to & \mathbf{R}^3 \\ & \theta \mapsto & (x(\theta), y(\theta), \sin\theta) \end{array}$$

Pour $z \in [-1, 1]$, on pose :

$$m_+(z) = (x(\arcsin(z)), y(\arcsin(z))), m_-(z) = (x(\pi - \arcsin(z)), y(\pi - \arcsin(z))) \ .$$

On définit alors $\phi$ par :

$$\begin{array}{rrl} f: & D^2 \to & \mathbf{R}^3 \\ & (X,Z) \mapsto & \left( \dfrac{\sqrt{1-Z^2}-X}{2\sqrt{1-Z^2}} m_-(Z) + \dfrac{\sqrt{1-Z^2}+X}{2\sqrt{1-Z^2}} m_+(Z), Z \right) \ . \end{array}$$

On note que $\phi$ est un plongement du disque dont les valeurs aux bords sont les points de $c$. q.e.d.

**NB** traitement spécial pour les points maximaux et minimaux de $Z$ sur $D^2$, à préciser à la fin de la preuve.

# Bibliography


[BG93] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.* Presses universitaires de France, 1993.

[dC76] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.

[GHL87] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian Geometry.* Springer, 1987.

[Sed94] V.D. Sedykh. Four vertices of a convex space curve. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 26 :177–180, 1994.