Cours de maitrise de math, MMB B2
Notes succintes

20 Septembre 2001

Contents

Chapter 3

Théorie locale des surfaces dans $\mathbf{R}^3$

Motivation

Def des surfaces : on veut définir les surfaces dans $\mathbf{R}^3$ d'une manière qui correspond à l'idée intuitive qu'on en a. Ce n'est pas si facile, il faut des précautions.

Connexions : c'est une notion fondamentale, qui permet de comparer des vecteurs en des points proches.

Métriques induites sur les surfaces Notion naturelle, e.g. pour la distance sur la surface de la terre.

Invariants locaux des surfaces Ecart au plan tangent, puis on en déduit la notion de courbure et de courbure moyenne de la surface.

Courbure Le point crucial est que c'est un invariant **intrinsèque** des surfaces, c'est le théorème Egregium de Gauss. On définit ici la courbure d'une manière intrinsèque, proche de ce qui se généralise dans un cadre beaucoup plus vaste.

3.1 Définitions des surfaces

Définition Une surface est un sous-ensemble $S \subset \mathbf{R}^3$ tel que, pour tout $x \in S$, il existe un voisinage U de x et une fonction $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ telle que $f^{-1}(0) \cap U = S \cap U$, et que df ne s'annule pas sur S.

Propriété Soit $x \in S$; il existe un voisinage U de x dans $\mathbf{R}^3$, un voisinage V de 0 dans $\mathbf{R}^2$ et une application régulière $\phi : V \to \mathbf{R}^3$, injective, dont la différentielle est partout de rang 2, telle que $S \cap U = \phi(V)$.

Propriété Equivalent à demander qu'il existe, au voisinage de tout point, une fonction à valeurs réelles dont l'ensemble considéré est une surface de niveau.

3.2 Applications régulières

3.3 Connection dans $\mathbf{R}^3$

Définition D^0 connection canonique sur $\mathbf{R}^3$, comme application bilinéaire sur les champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^3$. Par :

$$D^0_X Y = (dy_1(X), dy_2(X), dy_3(X)) \ .$$

Propriété On a les propriétés suivantes :

1. linéaire par rapport au premier vecteur.
2. $D^0_X fY = fD^0_X Y + df(X)Y$.
3. compatible avec la métrique.

Définition Transport parallèle le long d'une courbe.

Définition Crochet de Lie : $[X, Y] = D^0_X Y - D^0_Y X$.

Définition $X.f = df(X)$.

Propriété Soit f une fonction sur $\mathbf{R}^3$, et soit X, Y deux champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^3$. Alors :

$$X.(Y.f) - Y.(X.f) = [X, Y].f \ .$$

Identité de Jacobi $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.
Preuve en utilisant la propriété précédente.

3.4 Vecteurs tangents

Définition Plan tangent en un point $s \in S$: $\mathrm{Im} d_0 f$, où f est un paramétrage local en s. On le note $T_s S$.

Définition Plan affine tangent le sous-espace affine de $\mathbf{R}^3$ des points de la forme $s + x$, où $x \in T_s S$.

Définition Champs de vecteurs tangents à une surface.

NB Les champs de vecteurs définissent des "dérivations" sur l'espace des fonctions régulières sur une surface.

Remarque Si X, Y sont deux vecteurs tangents à S, on définit $[X, Y]$ par extension de X et Y au voisinage de S, et on remarque que $[X, Y]$ sur S ne dépend pas de l'extension choisie.

Proposition Soit X et Y des champs de vecteurs de $\mathbf{R}^3$, qui sont tangents à S. Alors $[X, Y]$ est tangent à S, et la restriction de $[X, Y]$ à S ne dépend que des restrictions de X et de Y à S.

Preuve Soit f une fonction définissant localement S, on lui applique la pté plus haut.

Définition Crochet de Lie de deux champs de vecteurs tangents à S, comme un champ de vecteurs tangent à S.

Fonctorialité Soit S et S' deux surfaces, et ϕ une application régulière de S dans S' dont la différentielle est partout injective. Alors ϕ préserve le crochet de Lie.

Preuve En utilisant l'action sur les fonctions.

3.5 Métrique induite

Métrique induite

Longueurs des courbes

Distance

Inégalité triangulaire

Aire

3.6 Invariants locaux

Opérateur de forme $BX = D^0 N$, où N est un champ de vecteurs normaux unitaires à S.

Proposition B est symétrique pour I.

Preuve Par crochet de Lie dans $\mathbf{R}^3$ et propriété que le crochet de deux vecteurs tangents à S est tangente à S, donc :

$$\begin{aligned} I(BX,Y) - I(BY,X) &= \langle D^0_X N, Y\rangle - \langle D^0_Y N, X\rangle \\ &= X.\langle N, Y\rangle - \langle N, D^0_X Y\rangle - Y.\langle N, X\rangle + \langle D^0_Y X, N\rangle \\ &= \langle [X,Y], N\rangle \end{aligned}$$

Courbures principales Valeurs propres de B. Les vecteurs propres sont les directions principales, leurs courbes intégrales les lignes de courbure. Les directions principales sont orthogonales.

Définition Un point où les deux courbures principales sont égales est **ombilique**. Ressemble localement à une sphère.

Propriété Soit P un plan normal à S en un point s ; l'intersection de S avec P est une courbe dont la courbure est :

$$k = k_1\langle v, e_1\rangle^2 + k_2\langle v, e_2\rangle^2 \ .$$

Preuve Soit v le vecteur unitaire dans l'intersection. On étend v en un champs de vecteur sur S au voisinage de s.

$$\begin{aligned} k &= \langle D^0_v v, N\rangle \\ &= v.\langle v, N\rangle - \langle v, D^0_v N\rangle \\ &= II(v,v) \\ &= \|\langle e_1, v\rangle e_1 + \langle e_2, v\rangle e_2\|^2_{II} \end{aligned}$$

et la suite suit de la définition des courbures principales.

Seconde forme fondamentale $II(X,Y) = -I(BX,Y)$.

Propriété $\langle D^0_X Y, N\rangle = II(X,Y)$.

Preuve

$$\begin{aligned} \langle D^0_X Y, N\rangle &= X.\langle Y, N\rangle - \langle Y, D^0_Y N\rangle \\ &= \langle Y, BX\rangle \end{aligned}$$

Interprétation simple Soit S le graphe d'une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, avec $f(0) = df(0) = 0$. Alors la seconde forme fondamentale de S en 0 est le Hessien de f en 0.

Troisième forme fondamentale $III(X,Y) = I(BX,BY)$.

NB III est une forme bilinéaire positive, et définie positive sauf lorsque une courbure principale est nulle.

Application de Gauss

NB notion de métrique "tirée" de celle de S^2 pour III.

Proposition $III(X,Y) = I_{S^2}(dN(X), dN(Y))$.

Courbure moyenne $2H = -\mathrm{Tr}(B)$.

Courbure de Gauss On définit la courbure de Gauss $\overline{K} := \det(B)$.

Proposition $\overline{K}$ est le rapport des éléments d'aires entre domaines qui se correspondent par N sur (S,I) et sur S^2.

Directions asymptotiques

3.7 Connexion sur S

Proposition Soit X et Y des champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^3$ tangents à S. Alors la restriction de $D^0_X Y$ à S ne dépend que des restrictions de X et Y à S.

Définition $D_X Y = D^0_X Y - II(X,Y)N$. Partie tangente de D^0. Possible grâce à la proposition précédente.

Théorème D vérifie les propriétés suivantes.
- $D_{fX}Y = fD_X Y$;
- $D_X(fY) = fD_X Y + (X.f)Y$;
- $D_X Y - D_Y X = [X,Y]$;
- $X.I(Y,Z) = I(D_X Y, Z) + I(Y, D_X Z)$.

Théorème D est uniquement déterminé par les propriétés ci-dessus et par I.

Preuve Par formule de définition :

$$2I(D_X Y, Z) = X.I(Y,Z) + Y.I(X,Z) - Z.I(X,Y) + I([X,Y],Z) + I([Z,X],Y) + I([Z,Y],X) \ .$$

Transport parallèle le long des courbes

3.8 Géodésiques

Remarque Soit $c : [0,1] \to S$ une courbe régulière. Soit X un champ de vecteurs sur S. Alors $D_{c'(t)}X$ ne dépend que de la restriction de X à l'image de c.

Définition Si X est un champ de vecteur défini le long de c, on définit $D_{c'(t)}X$ par ...

Définition Soit $c : [0,1] \to S$ une courbe, on dit que c est une géodésique si $D_{c'}c'$ est partout parallèle à c'. Si u est le vecteur tangent unitaire à c, alors c est géodésique si et seulement si $D_{c'}u = 0$ partout.

Remarque Une géodésique c est paramétrée à vitesse constante si et seulement si $D_{c'}c' = 0$. Réciproquement, une courbe telle que $D_{c'}c' = 0$ est une géodésique paramétrée à vitesse constante.

Définition Soit $c : [0,1] \to S$ une courbe. L'énergie de c pour I est :

$$E(c) := \int_0^1 \|c'(t)\|_I^2 dt \ .$$

Proposition Soit $c : [0,1] \to S$ une courbe. c est une géodésique si et seulement si, pour toute déformation de c qui fixe les extrémités, la longueur de c reste constante au premier ordre. c est une géodésique paramétrée à vitesse constante ssi, pour toute déformation de c qui fixe les extrémités, $E(c)$ reste constante au premier ordre.

Preuve Premier point : on se donne une variation $(c_s)_{s\in[0,1]}$ de c, avec $c_s(0) = c(0)$ et $c_s(1) = c(1)$ pour tout s. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}\int_0^1 \|c_s'(t)\|_I^2 dt \\
&= 2\int_0^1 I(c_s', D_{\partial_s c_s'} c_s') dt \\
&= 2\int_0^1 I(c_s', D_{c_s'} \partial_s c_s') dt \\
&= 2\int_0^1 c_s'(t).I(c_s', \partial_s c_s') - I(D_{c_s'} c_s', \partial_s c_s') dt
\end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial E}{\partial s} = 0$ pour toutes les variations si et seulement si $D_{c_s'} c_s' = 0$.

Pour le second point, on note $u_s(t)$ le vecteur tangent unitaire à c_s au temps t, on a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}\int_0^1 \|c_s'(t)\|_I dt \\
&= 2\int_0^1 \frac{I(c_s', D_{\partial_s c_s'} c_s')}{|c_s'\|_I} dt \\
&= 2\int_0^1 I(u_s(t), D_{c_s'} \partial_s c_s') dt \\
&= 2\int_0^1 c_s'(t).I(u_s, \partial_s c_s') - I(D_{c_s'} u_s, \partial_s c_s') dt
\end{aligned}$$

et donc $\frac{\partial L}{\partial s} = 0$ pour toute variation ssi $D_{c_s'} u_s = 0$.

NB !!!! Le point délicat de la preuve précédente est la construction locale de déformations qui intègrent un champ de vecteur donné le long d'une courbe!

Remarque En fait les géodésiques minimisent localement la longueur – on le verra plus tard.

Application exponentielle

Théorème L'application exponentielle est un difféomorphisme local en 0.

3.9 Application exponentielle

Symboles de Christoffel $\Gamma^i_{j,k}$ dans un système de coordonnées, par $\Gamma^i_{j,k} = \langle D_{e_j} e_k, e_i\rangle$.

Propriété $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

Propriété Existence et unicité des géodésiques paramétrées à vitesse constante issues d'un point donné avec une vitesse donnée.

3.10 Théorème de Gauss

Opérateur de courbure Si X, Y et Z sont trois champs de vecteurs sur une surface S, on pose :

$$R(X,Y)Z = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X,Y]}Z \ .$$

C'est encore un champ de vecteurs sur S.

Interprétation R mesure le "défaut de commutation" quand on déplace Z sur une courbe intégrale de X puis de Y, ou le contraire. Explique les symétries et autres propriétés décrites plus bas.

Remarque Si on fait la même construction dans $\mathbf{R}^3$, et qu'on pose pour 3 champs de vecteurs de $\mathbf{R}^3$:

$$R^0(X,Y)Z = D^0_X(D^0_Y Z) - D^0_Y(D^0_X Z) - D^0_{[X,Y]}Z \ ,$$

on trouve 0 (calcul simple). Interprétation en terme de commutation de champs de vecteurs.

Lemme

1. $R(Y,X)Z = -R(X,Y)Z$.
2. $I(R_{X,Y}T, Z) = -I(R_{X,Y}Z, T)$.
3. La valeur de $R(X,Y)Z$ en un point ne dépend que de la valeur de X en ce point.
4. $R(X,Y)Z$ ne dépend que de la valeur de Y et Z au point considéré.

Preuve 1. Immédiat.
2. Par compatibilité de D avec I et explicite.
3. Il suffit de vérifier que, si $X = 0$, on trouve 0 (et de même pour Y). Pour ¸ca, on peut utiliser le lemme suivant.

Lemme Soit $F_s : T_sT \to T_sS$ une application régulière pour chaque s, qui varie régulièrement avec s. Soit X et Y deux champs de vecteurs avec $X(m) = 0$. Alors :

$$D_Y(F(X))(m) = F(D_Y X)(m) \ .$$

Preuve Passage dans $\mathbf{R}^3$ et application de la même chose pour D^0, qui est évidente.
4. Conséquence des propositions évidentes pour X et pour T, avec les points précédents.

Courbure intrinsèque $K = I(R(X,Y)Y, X)$ si (X,Y) forment un repère orthonormé.

Remarque Indépendant du choix de X et Y, en fait on aurait pu prendre $I(R_{X,Y}Y', X')$ où (X,Y) et (X',Y') forment deux bases orthonormées.

Courbure et cartes La courbure d'une surface est une mesure de sa "proximité à un plan". C'est d'ailleurs la motivation qu'avaient Gauss, puis Riemann, en introduisant cette notion.

Lemme Soit S une surface et $x \in S$. La courbure K s'annule au voisinage de x si et seulement si x a un voisinage isométrique à un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^2$.

Théorème de Gauss $K = \overline{K}$.

Remarque On en déduit que la courbure de Gauss ne dépend que de I ! Théorème Egregium.

Extension de D

Formule de Codazzi $(D_X II)(Y,Z) = (D_Y II)(X,Z)$.

Remarque On peut aussi dire : $(D_X B)(Y) = (D_Y B)(X)$.

Preuve On démontre ensemble la formule de Codazzi et le théorème de Gauss, en développant la formule qui exprime que la courbure de D^0 est nulle. On étend X, Y et Z en des champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^3$. Alors :

$$\begin{array}{rcl}
0 & = & R^0_{X,Y}Z \\
 & = & D^0_X D^0_Y Z - D^0_Y D^0_X Z - D^0_{[X,Y]}Z \\
 & = & D^0_X(D_Y Z + II(Y,Z)N) - D^0_Y(D_X Z + II(X,Z)N) - D_{[X,Y]}Z - II([X,Y],Z)N \\
 & = & D_X D_Y Z + II(X, D_Y Z)N + X.II(Y,Z)N - II(Y,Z)BX \\
 & - & D_Y D_X Z - II(Y, D_X Z)N - Y.II(X,Z)N + II(X,Z)BY \\
 & & -D_{[X,Y]}Z - II([X,Y],Z)N \\
 & = & R_{X,Y}Z - II(Y,Z)BX + II(X,Z)BY + (D_X II)(Y,Z) - (D_Y II)(X,Z)
\end{array}$$

Théorème fondamental de la théorie des surfaces Soit S une surface, considérée comme une variété “abstraite”. Soit h une métrique sur S, et soit $b_x : T_xS \to T_xS$, pour chaque $x \in S$, une application linéaire symétrique pour h. Il existe une immersion de S dans $\mathbf{R}^3$ dont la métrique induite est h est l’application de Weingarten est b ssi $d^D b = 0$ et $\det(b) = K$, où D est la connexion de h.

Preuve Repoussée à plus tard.

Bibliography

[BG93] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.* Presses universitaires de France, 1993.

[dC76] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.

[GHL87] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian Geometry.* Springer, 1987.

[Sed94] V.D. Sedykh. Four vertices of a convex space curve. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 26 :177–180, 1994.