Cours de maitrise de math, MMB B2
Notes succintes

20 Septembre 2001

Contents

Chapter 4

Surfaces spéciales

Préliminiaires topologiques

Définition Bord d'une surface.

Définition Surfaces à bord. Il existe des points qui ont un voisinage qui est l'image par un difféomorphisme d'un morceau de demi-plan.

Remarque Une surface dont le bord est non vide n'est pas toujours une surface à bord !

Définition On dit qu'une surface est complète si son bord est vide.

Définition On dit qu'une surface est fermée si elle est compacte (sans bord).

Remarque Une surface fermée est donc complète... Mais la réciproque est fausse.

Exemple $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ est fermée. $S^2 \cap \{z > 0\}$ n'est pas compacte. $S^2 \cap \{z \geq 0\}$ est compacte à bord. $\{x^2 + y^2 = z^2 - 1\}$ est complète.

Lemme Toute surface compacte admet une métrique riemannienne.

Preuve Repose sur les partitions de l'unité, etc. Admis ici.

4.1 Surfaces réglées et développables

Définition Un sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$ est réglé s'il contient un segment passant par chacun de ses points.

Exemple Soit $U \subset \mathbf{R}^3$, et soit V l'enveloppe convexe de U. Alors $\partial V \setminus U$ est un ensemble réglé.

Définition Une surfaces réglées est une surface qui contient une droite passant par chacun de ses points.

Exemple Paraboloïde hyperbolique, $z = xy$.

Remarque Propriété assez générale des quadriques !

Propriété $K \leq 0$.

Propriété Les droites contenues dans une surface réglée sont nécessairement des courbes asymptotiques. Plus généralement, une courbe contenue dans une surface est une droite de l'espace ambiant ssi elle est à la fois asymptotique et géodésique.

Remarque Dans la suite de cette section, on étudie les surfaces paramétrées sous la forme $X(t,s) = a(t) + sw(t)$, avec $\|w\| = 1$. Forme un peu particulière de surfaces réglées. Ici $t \in I$ et $s \in \mathbf{R}$ à priori. Permet des surfaces singulières à priori.

Surfaces cylindriques Une telle surface est dite "cylindrique" si w est constant. Correspond à un "cylindre" au dessus d'une courbe.

Définition Une surface réglée est dite non-cylindrique si $w' \neq 0$ partout.

NB Attention ¸ca n'est pas l'opposé d'une surface cylindrique...

ID On veut trouver une paramétrisation un peu plus contrainte, sous la forme $b(t)+w(t)s$, où $\langle b', w'\rangle = 0$ partout.

On la cherche sous la forme : $b(t) = a(t) + u(t)w(t)$, on doit avoir alors :

$$b' = a' + u'w + uw' \ ,$$

et b' orthogonal à w', donc :

$$u = -\frac{\langle a', w'\rangle}{\|w'\|^2} \ ,$$

Propriété b ne dépend pas du choix de a ; en effet ¸ca découle de l'unicité de b, on peut aussi le montrer directement.

Définition b est la **ligne de striction** de la surface.

ID On écrit maintenant la surface avec la paramétrisation : $X(t,s) = b(t) + sw(t)$.

Propriété Il existe une fonction f telle que $b' \wedge w = fw'$. Alors $\|X_t \wedge X_s\|^2 = (f^2 + s^2)\|w'\|^2$. f est le **paramètre de distribution** de la surface.

Propriété Les points singuliers d'une surface réglée se trouvent sur la ligne de striction $u = 0$, et ils apparaissent seulement si $f = 0$.

Théorème La courbure de Gauss de la surface est :

$$K = -\frac{f^2}{(f^2 + s^2)^2} \ .$$

En particulier, on retrouve que $K \leq 0$, avec 0 exactement sur les courbes qui rencontrent la ligne de striction en un point où $f = 0$.

Preuve On calcule les matrices M_I et M_{II} de I et II respectivement dans la base $(\partial_s X, \partial_t X)$. On a :

$$M_I = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \ , \quad M_{II} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \ ,$$

avec :

$$a = \langle \partial_s X, \partial_s X\rangle = \langle w, w\rangle = 1 \ ,$$
$$b = \langle \partial_s X, \partial_t X\rangle = \langle w, b' + sw'\rangle = \langle w, b'\rangle \ ,$$

$$c = \langle \partial_t X, \partial_t X \rangle = \langle b' + sw', b' + sw' \rangle = \|b'\|^2 + s^2 \|w'\|^2 \ ,$$

donc :

$$\det M_I = \|b'\|^2 + s^2\|w'\|^2 - \langle w, b' \rangle^2 = \|b' \wedge w\|^2 + s^2\|w'\|^2 = f^2\|w'\|^2 + s^2\|w'\|^2 \ .$$

Par ailleurs, on a aussi :

$$E = \langle \partial_s \partial_s X, N \rangle = 0 \ ,$$

$$F = \langle \partial_t \partial_s X, N \rangle = \frac{\langle w', -fw' + sw \wedge w' \rangle}{\sqrt{s^2 + f^2}\|w'\|} = \frac{-f\|w'\|}{\sqrt{s^2 + f^2}} \ ,$$

donc :

$$\det(M_{II}) = -\frac{f^2\|w'\|}{f^2 + s^2} \ .$$

Donc :

$$K = \frac{\det(M_{II})}{\det(M_I)} = -\frac{f^2}{(f^2 + s^2)^2} \ .$$

Définition Surfaces localement convexes.

Définition Une surface est **développable** si sa courbure est partout nulle.

Théorème Une surface réglée et localement convexe est développable.

Exemple Bords des enveloppes convexes, quand régulières !

NB Attention on passe dans la partie plus culturelle du cours – mais les détails de la preuve peuvent être faits par les étudiants motivés.

Théorème Soit $c : S^1 \to \mathbf{R}^3$ une courbe régulière. Supposons que c se trouve sur le bord de son enveloppe convexe, et que sa courbure ne s'annule nulle part. Alors il existe au moins 4 points où la torsion de c s'annule.

Preuve Repose sur l'étude du bord de l'enveloppe convexe de la courbe, mais demande un peu de travail... Pas très difficile.

Remarque C'est le "théorème des quatre sommets" pour les courbes "convexes" de $\mathbf{R}^3$. Démontré en 1994, [Sed94]. Mais la conjecture complète reste ouverte, car on a du supposer que la courbure ne s'annule nulle part.

Conjecture (Scherk, 1936) Une courbe fermée régulière convexe de $\mathbf{R}^3$ a au moins 4 points de torsion nulle.

4.2 Fonctions sur une surface

But Définir le hessien et le laplacien d'une fonction sur une surface, et applications. Connu au moins du cours de physique. Principe du maximum énoncé sans preuve. Utilisé dans la suite.

Définition Gradient d'une fonction sur S.

Définition Soit f une fonction sur une surface S. Soit X et Y deux champs de vecteurs sur S. On pose :

$$\mathrm{Hess}(f)(X, Y) := X.(Y.f) - (D_X Y).f \ .$$

Propriété On a aussi : $\mathrm{Hess}(f)(X,Y) = I(D_X Df, Y) = I(X, D_Y Df)$.

Propriété En chaque point s de S, $\mathrm{Hess}(f)$ définit une forme bilinéaire symétrique. CAD : ne dépend que de la valeur de X et de Y au point s, pas de leurs dérivées.

Preuve Pour la symétrie :

$$\mathrm{Hess}(f)(X,Y) - \mathrm{Hess}(f)(Y,X) = X.(Y.f) - (D_X Y).f - Y.(X.f) + (D_Y X).f =$$
$$= [X,Y].f - [X,Y].f = 0 \ .$$

Reste seulement à montrer que 0 si $X = 0$ en s, mais évident par la définition.

Définition On définit de même le hessien d'une fonction de $\mathbf{R}^3$ par :

$$\mathrm{Hess}^0(f)(X,Y) := X.(Y.f) - (D^0_X Y).f \ .$$

C'est encore une forme bilinéaire symétrique en chaque point de $\mathbf{R}^3$.

Remarque Permet de définir la "dérivée seconde" d'une fonction. Mais ça n'est pas possible sans une connexion ! Situation différente de la dérivée première, qui peut se définir sans métrique et sans connexion.

Théorème Soit f une fonction sur $\mathbf{R}^3$, et soit $\overline{f}$ sa restriction à une surface S. Alors, en un point de S, on a pour deux vecteurs X et Y tangents à S :

$$\mathrm{Hess}(\overline{f})(X,Y) = \mathrm{Hess}^0(f)(X,Y) + (N.f)II(X,Y) \ .$$

Laplacien Soit S une surface et $u : S \to \mathbf{R}$. On appelle Laplacien de u la fonction définie sur S par : $\Delta u := -\mathrm{Tr}(\mathrm{Hess}(u))$.

Remarque On peut faire de même en dimension 1, le Laplacien est simplement la dérivée seconde (au signe près).

Remarque Le signe est choisi pour que cet opérateur soit positif sur les fonctions ! Voir plus bas.

Fonctions harmoniques Soit S une surface, et $u : S \to \mathbf{R}$. On dit que u est harmonique si son laplacien est partout nul.

Exemple Sur $\mathbf{R}$, les fonctions harmoniques sont les fonctions affines.

Fonctions complexes [pour les fonctions réelles et complexes]

Théorème Soit S une surface, et $u : S \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors la partie réelle de u et la partie imaginaire de u sont toutes deux harmoniques.

Définition JX est le vecteur normal à X, de même norme, dans le sens trigonométrique.

Lemme $D_Y(JX) = JD_Y X$.

Preuve (du théorème) Soit X un champ de vecteurs unitaires. On a alors :

$$\begin{aligned}
-\Delta u &= X.du(X) + JX.du(JX) - du(D_X X) - du(D_{JX} JX) \\
&= -iX.du(JX) + iJX.du(X) + idu(JD_X X) - du(JD_{JX} X) \\
&= -iX.du(JX) + idu(D_X JX) + iJX.du(X) - idu(D_{JX} X) \\
&= -i\mathrm{Hess}(u)(X, JX) + i\mathrm{Hess}(u)(JX, X)
\end{aligned}$$

Remarque La réciproque est vraie aussi, montrée plus tard dans le cours.

Principe du maximum Une fonction harmonique ne peut pas avoir de maximum isolé.

Principe du maximum généralisé Soit f et g deux solutions d'une équation du type : $\mathrm{Tr}(\mathrm{Hess}(f)M(f,df)) + P(f,df) = 0$ sur un ouvert connexe Ω d'une surface, où $M(f,df)$ est une matrice 2×2 définie positive. Supposons que $f \geq g$ partout et $f(x_0) = g(x_0)$, et $d_{x_0}f = d_{x_0}g$. Alors $f = g$ partout.

Remarque Preuve possible dans bcp de cas si on suppose que f et g sont analytiques – en fait elles le sont souvent comme solutions de ces opérateurs.

Remarque l'hypothèse est équivalente au fait que f est solution d'une équation du type $\Delta f + P(f,df) = 0$, mais pour le laplacien d'une métrique autre que la métrique considérée sur S.

4.3 Déformations de surfaces

Déformations normales Il suffit de les considérer pour obtenir toutes les déformations infinitésimales de surfaces, au moins dans le cas complet. Données sous la forme fN. Revient à se donner une famille d'applications $\phi_t : S \to \mathbf{R}^3$, avec $\partial\phi_t/\partial t$ normal à $S_t := \phi_t(s)$.

Remarque Revient aussi à se donner une application $\Phi : S \times [-1,1] \to \mathbf{R}^3$, avec $\partial\Phi/\partial t = fN$. On peut donner explicitement Φ en utilisant l'application exponentielle normale à S.

NB Détermine une identification canonique entre la surface de départ et les surfaces déformées ; à tout champ de vecteurs sur S, on peut associer un champ de vecteur sur chaque S_t. On peut donc parler de variation première (dérivée) de I, II, B, da, etc.

cad Si X est un vecteur sur S, avec $X = \gamma'(0)$, on lui associe sur la courbe intégrale de N un champ de vecteurs donnés par $(\Phi \circ \gamma)'(0)$.

Remarque Attention, le vecteur normal unitaire N_t à S_t n'est pas le vecteur tangent unitaire à la courbe $\phi_t(x)$ pour x fixé, qu'on note encore N !

Lemme Soit X un champ de vecteurs sur S, étendu en un champ au voisinage de S. On a : $[X, fN] = 0$.

Preuve On se donne une paramétrisation locale de S, soit $v : U \to S$; on en déduit une application f d'un ouvert de $V \subset \mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$, donnée par $f(x,t) = \Phi(t, u(x))$. On appelle Y l'image inverse de X par f, alors Y est partout horizontale et indépendant de z dans $\mathbf{R}^3$; puis calcul explicite.

Variation première de I On a :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -2fII\ .$$

Preuve Pour X, Y deux champs de vecteurs sur S on a :

$$\begin{aligned}
\frac{dI(X,Y)}{dt} &= (fN).\langle X, Y\rangle\ ,\\
&= \langle D^0_{fN}X, Y\rangle + \langle X, D^0_{fN}Y\rangle\ ,\\
&= \langle D^0_X(fN), Y\rangle + \langle X, D^0_Y(fN)\rangle\\
&= -2fII(X,Y)\ .
\end{aligned}$$

Variation première de II On a :

$$\frac{\partial II}{\partial t} = \mathrm{Hess}^0(f) - fIII \ .$$

Preuve On montre d'abord que : $(D^0_{fN}N_t)_{|t_0} = Df$, où le gradient est pris sur S. On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{dII(X,Y)}{dt} &= (fN).\langle D^0_X Y, N_t\rangle \ , \\
&= \langle D^0_{fN} D^0_X Y, N\rangle + \langle D^0_X Y, D^0_{fN} N_t\rangle \ , \\
&= \langle R^0_{fN,X} Y + D^0_X D^0_{fN} Y + D_{[fN,X]} Y, N\rangle - \langle D^0_X Y, Df\rangle \\
&= \langle D^0_X D^0_Y fN, N\rangle - df(D_X Y) \\
&= \langle D^0_X(-fBY + df(Y)N), N\rangle - df(D_X Y) \\
&= -fII(X, BY) + X.df(Y) - df(D_X Y) \\
&= -fIII(X,Y) + \mathrm{Hess}(f)(X,Y) \ .
\end{aligned}$$

Variation première de l'aire La variation de l'aire est donnée par :

$$\frac{\partial da}{\partial t} = -2fH \ .$$

Traduction Variation de l'aire d'un domaine en terme d'intégration.

Surfaces minimales Une surface est dite **minimale** si sa courbure moyenne est partout nulle.

Explication Correspond aux surfaces dont l'aire ne varie pas au premier ordre quand on fait des déformations à support compact.

4.4 Surfaces minimales

Théorème Une surface est minimale si et seulement si, pour toute déformation à support compact, la variation de l'aire est nulle au premier ordre.

Interprétation physique Les surfaces minimales correspondent en particulier aux surfaces dont l'aire est minimale sous des contraintes données. Par exemple, les films de savon, qui minimisent leur tension superficielle.

Paramétrisation isothermes Une paramétrisation $X : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ d'une surface est **isotherme** si on a :

$$\|\partial_s X\| = \|\partial_t X\| \ , \quad \langle \partial_s X, \partial_t X\rangle = 0 \ .$$

Traduction On demande qu'il existe une fonction f sur Ω (non nulle) telle qu'on ait :

$$\langle dX(u), dX(v)\rangle = f^2\langle u, v\rangle \ .$$

Propriété Soit X une paramétrisation isotherme d'une surface. Alors :

$$\partial_{ss} X + \partial_{tt} X = 2f^2 HN \ .$$

Preuve On dérive les équations caractérisant les paramétrisations isothermes :

$$\langle \partial_{ss}X, \partial_s X\rangle = \langle \partial_{st}X, \partial_t X\rangle \ ,$$

$$\langle \partial_{ts}X, \partial_t X\rangle + \langle \partial_s X, \partial_{tt}X\rangle = 0 \ .$$

Donc :

$$\langle \partial_{ss}X, \partial_s X\rangle + \langle \partial_{tt}X, \partial_s X\rangle = 0 \ ,$$

ce qui indique que $\partial_{ss}X + \partial_{tt}X$ est parallèle à N. Mais comme la paramétrisation est isotherme on a :

$$\langle \partial_{ss}X + \partial_{tt}X, N\rangle = 2f^2 H \ .$$

Théorème Soit S une surface. S est minimale ssi, pour toute paramétrisation isotherme, les fonctions coordonnées sont harmoniques.

Preuve Conséquence de la propriété précédente.

Théorème Une S surface est minimale ssi ses fonctions coordonnées sont harmoniques sur S.

Preuve Calcul explicite du Hessien, trace, et obtient $2HN$, donc 0 ssi $H = 0$.

CAD Le thm concernant les paramétrisations isothermes est moins géométrique, mais c'est ce qui sert dans la suite.

Représentation de Weierstrass Soit S une surface, et $X = (x, y, z)$ une paramétrisation de S. On note :

$$\phi_1 = \partial_s x - i\partial_t x, \ \phi_2 = \partial_s y - i\partial_t y, \ \phi_3 = \partial_s z - i\partial_t z \ .$$

Alors X est isotherme ssi $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$. De plus, si c'est le cas, S est minimale ssi les ϕ_i sont holomorphes.

Conséquence La recherche de surfaces minimale est ramenée à l'étude de fonctions holomorphes ! Cf les TD.

Lemme Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, et soit S le graphe de f. Alors la courbure moyenne de S est :

$$H = \frac{(1+(\partial_y f)^2)\partial^2_{xx} f + (1+(\partial_x f)^2)\partial^2_{yy} f - (1+\partial_x f \partial_y f)\partial^2_{xy} f}{((1+(\partial_x)^2)(1+(\partial_y f)^2) - (\partial_x f)^2(\partial_y f)^2)\sqrt{1+\|df\|^2}} .$$

Preuve On note $X := (1, 0, \partial_x f)$ et $Y := (0, 1, \partial_y f)$. Alors N est parallèle à $V = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1)$. On a :

$$II(X, X) = \frac{\langle D^0_X X, V\rangle}{\|V\|} \ ,$$

donc

$$II(X, X) = \frac{\partial^2 f/\partial x^2}{\sqrt{1+\|df\|^2}} \ ,$$

et de même pour Y. De plus :

$$II(X, Y) = \frac{\partial^2 f/\partial x \partial y}{\sqrt{1+\|df\|^2}} \ .$$

Par ailleurs, on a :

$$I(X, X) = 1 + (\partial f/\partial x)^2 \ , \quad I(Y, Y) = 1 + (\partial f/\partial y)^2 \ , \quad I(X, Y) = (\partial f/\partial x)(\partial f/\partial y) \ ,$$

et on en déduit H.

Principe du maximum Soit S_1 et S_2 deux surfaces minimales, et $x \in S_1 \cap S_2$. Supposons que S_1 reste, au voisinage de x, d'un seul coté de S_2. Alors S_1 et S_2 sont confondues au voisinage de x.

Preuve On prend un voisinage de x où S_1 et S_2 sont les graphes de fonctions f_1 et f_2 au-dessus du plan tangent à S_1 en x. Alors f_1 et f_2 sont harmoniques. On leur applique le principe du maximum pour conclure.

Théorème Il n'existe pas de surface minimale fermée. (ie : compacte sans bord !).

Propriété Soit g une courbe dans $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^3$. Soit S une surface à bord compacte, dont le bord est g. Si S est minimale, alors $S \subset \mathbf{R}^2$.

Théorème Soit g une courbe fermée de $\mathbf{R}^3$. Soit S une surface compacte minimale dont le bord est S. Alors S est contenue dans l'enveloppe convexe de g.

4.5 Surfaces à courbure moyenne constante

Définition Une surface à courbure moyenne constante est un surface telle que $H \equiv H_0$.

Remarque En particulier, les surfaces minimales sont CMC.

Interprétation physique Les bulles de savon sont des surfaces à courbure moyenne constante. En effet, la pression à l'intérieur de la bulle est supérieure à la pression à l'extérieur, ce qui est contrebalancé par la pression superficielle du film de savon.

Principe du maximum Soit S_1 et S_2 deux surfaces ayant la même courbure constante, et $x \in S_1 \cap S_2$ un point où les vecteurs normaux unitaires sont orientés du même coté. Supposons que S_1 reste, au voisinage de x, d'un seul coté de S_2. Alors S_1 et S_2 sont confondues au voisinage de x.

Preuve On prend un voisinage de x où S_1 et S_2 sont les graphes de fonctions f_1 et f_2 au-dessus du plan tangent à S_1 en x. Alors f_1 et f_2 sont solution de l'équation :

$$\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$$

$$=H_0\left(\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)\sqrt{1+\|df\|^2}\,.$$

On leur applique le principe du maximum pour conclure.

Réflexion d'Aleksandrov

Caractérisation de S^2 Soit S une surface fermée à courbure moyenne constante. Alors S est une sphère.

cad S est une “vraie” sphère ronde !!

Preuve Réflexions, on obtient un plan de symétrie pour chaque plan vectoriel. Ce plan passe nécessairement par le centre de gravité de la surface. Donc tous les plans passant par ce point sont des plans de symétrie. Donc S est symétrique sous le groupe engendré par ces symétries, qui n'est autre que le groupe des isométrie de $\mathbf{R}^3$ fixant ce point.

Bibliography

[BG93] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.* Presses universitaires de France, 1993.

[dC76] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.

[GHL87] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian Geometry.* Springer, 1987.

[Sed94] V.D. Sedykh. Four vertices of a convex space curve. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 26 :177–180, 1994.