Cours de maitrise de math, MMB B2
Notes succintes

20 Septembre 2001

Table des matières

Chapitre 5

Le théorème de Gauss-Bonnet

5.1 Surfaces abstraites, variétés

Cartes Soit E un espace topologique ; une carte dans E est un couple (U, ϕ), où U est un ouvert de $\mathbf{R}^2$, et $\phi : U \to E$ est un homéomorphisme.

CAD Fournit un système de coordonnées dans un morceau de E.

Atlas Un atlas est une famille (U_i, ϕ_i) de cartes tel que :

1. les $\phi_i(U_i)$ recouvrent E ;
2. si $\phi(U_i) \cap \phi_j(U_j) \neq \emptyset$, et si $W := \phi_i^{-1}(\phi(U_i) \cap \phi_j(U_j))$, alors $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ est régulière sur W.

Définition Une surface est un espace topologique **séparé** muni d'un atlas. Une surface orientable est obtenue si on demande que les $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ préservent l'orientation.

NB Dans la suite on utilisera seulement des surfaces orientables.

Exemple Bande de Möbius. Non orientable.

Exemple Pour séparé : deux copies de $\mathbf{R}^2$ collées en 0.

Définition Deux surfaces sont équivalentes si leurs atlas sont compatibles, c'est à dire si...

Variétés Même chose en dim plus grande.

Lemme Les surfaces de $\mathbf{R}^3$ sont des surfaces (abstraites).

Définition Applications régulières.

Définition Champs de vecteurs. Espace tangent.

Définition Difféomorphismes.

Définition Métriques riemanniennes.

Exemple Surfaces dans $\mathbf{R}^3$ et leurs métriques induites.

Lemme Toute surface compacte admet une métrique riemannienne.

Preuve Repose sur les partitions de l'unité, etc. Admis ici.

Remarque Certaines métriques riemanniennes ne sont pas obtenues dans $\mathbf{R}^3$! Par exemple la métrique plate sur le tore T^2, à cause du :

Théorème de Hadamard : toute surface fermée dans $\mathbf{R}^3$ a une courbure qui est strictement positive en un point.

5.2 Gauss-Bonnet pour les surfaces dans $\mathbf{R}^3$

Théorème Soit S une surface fermée dans $\mathbf{R}^3$. Alors l'intégrale de la courbure de S est égale à un multiple entier de 4π. Cet entier est le degré de l'application de Gauss.

Définition Un point critique d'une application d'une surface dans une autre est un point où la différentielle n'est pas injective.

Définition Une valeur critique d'une application est l'image d'un point critique.

Lemme de Sard : pour toute application régulière d'une surface fermée dans une autre, l'ensemble des valeurs critiques est de mesure nulle.

Preuve Admis ici, mais pas très difficile — on se ramène à une question locale pour les applications d'un ouvert de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$.

Degré des applications

NB (admis) Soit $f : S \to S'$ une application régulière entre surface orientables . Il existe des valeurs régulières de f, car le complémentaire est de mesure nulle.

Lemme Soit $f : S \to S'$ une application régulière. Il existe un entier $k \in \mathbf{Z}$ tel que :

1. pour toute 2-forme w sur S', on a :
$$\int_S f^* w = k \int_{S'} w \ ;$$
2. pour toute valeur régulière y de f, on a :
$$\sum_{f(x)=y} \mathrm{sign}(\mathrm{Jac}(d_x f)) = k \ .$$

Preuve exercice ! Découper la surface en morceaux, etc.

Définition On appelle k le degré de f.

Remarque Si f n'est pas surjective, son degré est nul.

Remarque Rapport avec le degré des applications en dim 1 : cas particulier.

Preuve du théorème de Gaus-Bonnet : On fait un changement de variables et on se ramène à une intégration sur la sphère (exercice).

5.3 Triangulations

Définition Triangulations

Définition Triangulations plus fines.

Définition Triangulations homotopes.

Lemme **(Admis)** Soit S une surface, et soit T et T' deux triangulations de S. Il existe une triangulation T'' homotope à T et une triangulation $\overline{T}$ plus fine que T' et que T''.

Exemple Triangulations de S^2. Du tore. Calculs de caractéristique d'Euler...

Définition Caractéristique d'Euler d'une triangulation.

Remarque Pas nécessaire que ce soit une triangulation ! Exemples des polyèdres réguliers.

Lemme si T' est plus fine que T, alors $\chi(T') = \chi(T)$.

Corollaire Soit S une surface ; toutes les triangulations de S ont même caractéristique d'Euler.

Exemple 2 pour S^2, 0 pour T^2, puis tores à 2 trous, 3 trous, etc.

5.4 Formes différentielles

Définition 1-formes, Ω^1.

Exemple Différentielle d'une fonction.

Définition Intégration d'une 1-forme sur une courbe.

Rappel Formes antisymétriques dans $\mathbf{R}^2$. Forment un EV de dim 1.

Définition 2-formes dans S. $\Omega^2(S)$.

Définition Aire associée à une 2-forme. Intégration sur un ouvert à bord.

Lemme Indépendant du paramétrage choisi.

Définition 2-forme canonique associée à une métrique riemannienne.

Lemme Correspond à la notion d'aire introduite avant !

Définition df, du.

Définition $u \wedge v$ pour u, v des 1-formes.

Propriété $d(fu) = df \wedge u + f du$.

Lemme Invariant par difféomorphisme.

Propriété Soit u une 1-forme sur un triangle Ω de $\mathbf{R}^2$. Alors :

$$\int_\Omega du = \int_{\partial\Omega} v \ .$$

Preuve Explicite : $u = adx + bdy$, puis on applique une intégration à chaque terme.

Formule de Stokes Soit $\Omega \subset S$ un ouvert relativement compact, à bord régulier par morceaux. Alors, pour toute 1-forme u sur S :

$$\int_\Omega du = \int_{\partial\Omega} v \ .$$

Preuve Par décomposition en éléments triangulaires. Puis utilisation de l'invariance par difféomorphismes et passage dans $\mathbf{R}^2$ pour un triangle.

Définition 1-forme fermées.

Exemple La différentielle d'une fonction est fermée.

Définition Formes exactes.

Lemme de Poincaré Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbf{R}^2$. Pour toute 1-forme u à support dans Ω avec $du = 0$, il existe une fonction f sur $\mathbf{R}$ telle que $u = df$. Pour toute 2-forme w sur Ω, il existe une 1-forme u telle que $w = du$.

5.5 Gauss-Bonnet polygonal

Lemme Soit S une surface, et soit $\Omega \subset S$ un ouvert relativement compact de S à bord régulier, difféomorphe à un disque. Alors :

$$\int_\Omega K da = 2\pi - \int_{\partial\Omega} kds \ .$$

Preuve Il suffit de le faire pour les disques de $\mathbf{R}^2$ munis d'une métrique. On choisit un champs de vecteurs unitaire v, avec une singularité. On considère la 1-forme associée à la connexion, soit :

$$u(x) = g(D_x v, Jv) \ .$$

On remarque que $du = Kda$. En effet :

$$du(v, Jv) = v.g(D_{Jv}v, Jv) - Jv.g(D_v v, Jv) - g(D_[v, Jv]v, Jv) \ ,$$

donc :

$$du(v, Jv) = g(D_v D_{Jv} v, Jv) - g(D_{Jv} D_v v, Jv) - g(D_[v, Jv]v, Jv) \ ,$$

donc

$$du(v, Jv) = K \ .$$

Théorème Soit S une surface, et soit Ω un ouvert relativement compact de S, à bord régulier par morceaux, homéomorphe au disque. Alors :

$$\int_\Omega K da = 2\pi - \int_{\partial\Omega} kds + \sum_i \alpha_i \ ,$$

où les α_i sont les angles (extérieurs) aux points singuliers du bord.

Preuve Approximation par des réguliers.

5.6 Gauss-Bonnet intrinsèque

Théorème Soit S une surface (intrinsèque). L'intégrale de la courbure de S est égale à $4\pi\chi(S)$.

Corollaire Si f est une surface dans $\mathbf{R}^3$, alors le degré de son application de Gauss est égale à sa caractéristique d'Euler.

Preuve On choisit une triangulation, et on applique le théorème précédent. On remarque que les angles intérieurs sont π moins les angles extérieurs, et que la somme des angles intérieurs est 2π pour chaque sommet.

Bibliographie

[BG93] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.* Presses universitaires de France, 1993.

[dC76] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.

[GHL87] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian Geometry.* Springer, 1987.

[Sed94] V.D. Sedykh. Four vertices of a convex space curve. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 26 :177–180, 1994.