Cours de maitrise de math, MMB B2
Notes succintes

20 Septembre 2001

Table des matières

Intro : remarques générales

0.1 Présentation

0.2 Objectifs du cours

Trois objectifs distincts :

1 : géométrie "classique" celle des courbes et des surfaces dans $\mathbf{R}^2$ et dans $\mathbf{R}^3$. Correspond encore à des domaines actifs des mathématiques, mais surtout indispensable pour beaucoup d'applications – par exemple mécanique (forme des voitures...) robotique (trajectoire des bras des robots), informatique (géométrie pour la vision artificielle, etc) etc. Très utile aussi pour concours. Enseigné en 1ère ou 2ème année d'université dans la plupart des pays européens !

2 : intro élémentaire à la topologie C'est une série d'outils indispensables aux maths contemporaines, et aussi un domaine très actif de recherche. Les objets mathématiques considérés sont abstraits, on va les introduire ici dans les cadres où ils sont les plus faciles à comprendre heuristiquement, pour les courbes et pour les surfaces. Ca devrait aider les étudiants qui continueront à faire des maths à avancer dans leurs études. Pour les autres ca sera une introduction utile à des outils conceptuels puissants.

On va introduire les concepts fondamentaux d'homologie et de cohomologie, ainsi que des idées assez simples de degré d'une courbe, et plus tard de degré d'une application.

3 : intro à la géométrie différentielle Là aussi c'est un domaine important des maths contemporaines, dont l'abord est rendu assez difficile par des notions de bases assez abstraites – variété, tenseur de courbure, etc. On va considérer ici le cas le plus simple, celui des surfaces, et essayer de faire comprendre dans ce cadre les idées fondamentales du domaine.

0.3 Méthode de travail

Questions Ne pas hésiter à en poser. Pendant le cours, ou bien au début ou a la fin. Ou pendant les pauses.

Apprendre le cours Connaitre les définitions et les énoncés des théorèmes, et savoir retrouver les preuves de théorèmes. Pas indispensable de connaitre les formules par coeur, mais savoir à quoi correspondent les différents termes.

Notations Attention, on va utiliser une notation "abstraite", puissante mais pas forcément facile à utiliser au départ. On évite au maximum de faire des calculs en coordonnées, et on fait des opérations sur des objets géométriques. Pas tellement présent dans la bibliographie. Les étudiants peuvent utiliser des calculs "classiques" en coordonnées, mais il serait bon qu'ils comprennent aussi l'approche "abstraite".

Réferences Voir biblio. Conseil : Berger et do Carmo, suivant la partie du cours. Seule une partie de Berger correspond au cours.

Exams Documents autorisés à priori. Calculatrices UPS seulement.

0.4 Plan

1. Courbes dans $\mathbf{R}^2$ Vitesse, courbure. Degré d'une application de S^1 dans S^1. Nombre de rotation d'orientation d'une courbe. Degré d'une courbe par rapport à un point. Théorème de Jordan. Inégalité isopérimètrique. Convexité.

2. Courbes dans $\mathbf{R}^3$ Repère de Serret-Frenet. Théorème fondamental. Théorème de Fenchel. Noeuds. Théorème de Fairy-Milnor.

3. Théorie locale des surfaces dans $\mathbf{R}^3$ Définitions des surfaces. Applications régulières. Vecteurs tangents. Métrique induite. Invariants locaux. Crochet de Lie. Connexion sur S. Géodésiques. Théorème de Gauss.

4. Surfaces spéciales Surfaces réglées et développables. Fonctions sur une surface. Déformations de surfaces. Surfaces minimales. Surfaces à courbure moyenne constante.

5. Le théorème de Gauss-Bonnet Surfaces abstraites, variétés. Revêtements. Triangulations. Formes différentielles. Degré des applications. Gauss-Bonnet dans $\mathbf{R}^3$. Gauss-Bonnet polygonal. Gauss-Bonnet intrinsèque.

6. Géométrie intrisèque des surfaces Coordonnées. Champs de Jacobi. Géodésiques. Surfaces à courbure positive : théorème de Bonnet. Surfaces à courbure négative : théorème de Hadamard.

0.4.1 Pratique

Partiel et exam final. Deux devoirs. Début des cours à l'heure. Eteindre les portables.

Chapitre 1

Courbes dans $\mathbf{R}^2$

Notations

$\mathbf{R}^2$ muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$. Longueur associée, notée d, etc.

Régularité Sauf mention explicite du contraire, on considère des courbes C^∞. Pour se simplifier la vie, car la plus grande partie du chapitre pourrait se faire avec une régularité moins grande.

1.1 Définitions des courbes

Courbes paramétrés Application régulière $f : I \to \mathbf{R}^2$, dont la dérivée première ne s'annule jamais.

NB Besoin de condition de dérivée non nulle à cause de points singuliers qu'on peut obtenir sans cela !

Courbes géométriques Classes d'équivalences de courbes paramétrées.

NB Pas la même chose que de regarder les images !

Courbes orientées Définies comme courbes paramétrées, modulo changements de paramétrisation qui préservent l'orientation, avec $\stackrel{+}{\simeq}$. Interprétation géométrique.

Proposition A chaque courbe géométrique correspondent deux courbes orientées.

1.2 Vitesse, tangentes

Vitesse d'une courbe paramétrée. $v(s) = \|f'(s)\|$.

Tangente Unique droite passant par $f(s)$ et dirigée par $f'(s)$.

Vecteur tangent unitaire Deux choix possibles, un seul compatible avec l'orientation pour une courbe orientée. On le note τ

Vecteur normal unitaire On le note ν.

Remarque τ définit une application continue de I dans S^1.

1.3 Courbure

Définition Pour une courbe paramétrée à vitesse 1 :

$$k(t) = \langle d\tau(t)/dt, \nu(t)\rangle \ .$$

Signication naturelle car dérivée est dans $\mathbf{R}^2$ donc ok.

Exemple Une courbe dont la courbure est constante égale à 1 est un cercle de rayon 1.

Définition Pour une courbe paramétrée en général :

$$k(t) = \frac{1}{v}\langle d\tau(t)/dt, \nu(t)\rangle \ .$$

Rayon de courbure Inverse de la courbure.

Proposition Si f est paramétrée à vitesse 1, on a en chaque point :

$$f''(t) = k(t)\nu(t) \ .$$

Preuve Par :

$$2\langle f''(t), f'(t)\rangle = \langle f'(t), f'(t)\rangle' = 0 \ ,$$

donc f'' est orthogonal à f'.

Proposition Soit $f : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée à vitesse 1, et soit $t_0 \in I$. On a au voisinage de t_0 :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)v(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}k(t_0)\nu(t_0) + O((t-t_0)^3) \ .$$

Corollaire Interprétation du rayon de courbure en terme de cercle osculateur.

Corollaire Soit $\Delta(t_0)$ la tangente en t_0 à f, notons $\delta(t) := d(f(t), \Delta(t_0))$. Alors :

$$\delta(t) = \frac{|k(t_0)|}{2}(t-t_0)^2 + O((t-t_0)^3) \ .$$

Preuve On a :

$$d(f(t), \Delta(t_0)) = |\langle f(t) - f(t_0), \nu(t_0)\rangle| \ ,$$

et le corollaire suit de la proposition plus haut.

Courbure totale d'une courbe Intégrale de la courbure.

Propriété Indépendant de la paramétrisation choisie, à condition que l'orientation reste la même.

Remarque Change de signe avec l'orientation !

1.4 Un peu de topologie

Motivations On voit apparaitre des applications de S^1 dans S^1 quand on étudie les vecteurs tangents de courbes fermées. On veut les comprendre d'un point de vue **topologique**, c'est à dire aux déformations près. En particulier, on voudrait comprendre quand deux telles applications sont déformables l'une dans l'autre, c'est à dire qu'on veut les classifier à déformations près.

Exemple Donner exemples :
- application identité, degré 1 ;
- de même mais dans l'autre sens ;
- application de degré un qui fait une "boucle" ;
- application de degré 3 ;
- de même mais avec une boucle.

Remarquer que le nombre de tours joue un rôle.

1.4.1 Relevés des applications

Définition On note p la projection canonique de $\mathbf{R}$ dans S^1. On a alors le lemme fondamental suivant.

Lemme Soit $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$, $f \in C^\infty([a, b], S^1)$, et $u \in p^{-1}(f(a))$. Il existe une unique application $\overline{f} \in C^\infty(I, \mathbf{R})$ telle que $f = p \circ \overline{f}$ et que $\overline{f}(a) = u$.

DESSIN

(Graphe commutatif pour relèvement de f)

Remarque Notion de dérivée d'une application à valeur dans S^1. C'est un nombre, on le trouve en identifiant $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

Preuve Si $f = p \circ \overline{f}$, alors $f' = \overline{f}'$ en tout point. Donc $\overline{f}$ est uniquement déterminée par intégration.

Remarque Deux relevés diffèrent par une constante, multiple de 2π.

1.4.2 Degré des applications

Degré d'une application de S^1 dans S^1 Soit $f : S^1 \to S^1$. On identifie $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, on applique le lemme précédent, et on obtient une application $\overline{f} : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$. On appelle **degré de** f le nombre :

$$d^\circ f := \frac{\overline{f}(2\pi) - f(0)}{2\pi} \ .$$

Propriété $d^\circ f \in \mathbf{Z}$.

Preuve $f(2\pi) = f(0)$, donc $\overline{f}(2\pi) - \overline{f}(0) \in 2\pi\mathbf{Z}$, qed.

Remarque On aurait pu remplacer 0 par $t \in \mathbf{R}$, et poser :

$$d^\circ f := \frac{\overline{f}(2\pi + t) - f(t)}{2\pi} \ ,$$

le résultat aurait été le même. Ne dépend pas non plus du relevé de f choisi – car les différents relevés diffèrent par une constante additive.

Remarque Si on prend une application périodique d'une période autre que 2π, on a une définition analogue ; par exemple, pour $f : \mathbf{R}/L\mathbf{Z} \to \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, on pose :

$$d^\circ f := \frac{\overline{f}(t + L) - \overline{f}(t)}{2\pi} \ .$$

Propriété Une application non surjective f de S^1 dans S^1 est de degré nul.

Preuve Soit $\overline{f} : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ un relevé de f. Soit $\theta \in S^1$ une valeur non atteinte par f. Comme $f(S^1)$ est compacte, son complémentaire est ouvert, donc on peut supposer que $\theta \neq f(0)$. Il existe donc deux réels u, v congrus à θ modulo 2π, avec $u \in]f(0) - 2\pi, f(0)[$ et $v \in]f(0), f(0) + 2\pi[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a $\overline{f}(2\pi) \in [u, v]$, donc $\overline{f}(2\pi) = \overline{f}(0)$ puisque $f(2\pi) = f(0)$. Donc $d^\circ f = 0$.

Remarque Interprétation en terme de nombre d'image réciproques, avec signe.

1.4.3 Homotopies

Définition Soit $c_1, c_2 : S^1 \to S^1$ deux applications régulières. On appelle homotopie de c_1 en c_2 une application régulière :

$$H : [0, 1] \times S^1 \to S^1 \ ,$$

telle que :

$$\begin{aligned} H(0, s) &= c_1(s) \ , \\ H(1, s) &= c_2(s) \ . \end{aligned}$$

On dit alors que c_1 et c_2 sont homotopes.

Remarque Il s'agit donc d'une "déformation" de c_1 en c_2.

1.4.4 Classification

Théorème Les applications de S^1 dans S^1 sont classifiées, à homotopie près, par leur degré.

Traduction Deux applications sont homotopes si et seulement si elles sont le même degré.

Preuve Si H est une homotopie entre c_1 et c_2, alors $H(t, \cdot)$ est une application régulière de S^1 dans S^1. Son degré est une fonction continue de t, à valeur dans $\mathbf{Z}$, donc elle est constante. Donc $d^\circ c_1 = d^\circ c_2$.

Réciproque : soit c_1 et c_2 deux applications de même degré. On les relève en deux applications :

$$\bar{c}_1 : [0, 2\pi] \to \mathbf{R} \ ,$$

$$\bar{c}_2 : [0, 2\pi] \to \mathbf{R} \ .$$

telle que :

$$\bar{c}_1(2\pi) - \bar{c}_1(0) = \bar{c}_2(2\pi) - \bar{c}_2(0) = 2\pi d^\circ c_1 \ .$$

On pose pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $s \in [0, 2\pi]$:

$$\overline{H}(t, s) = t\bar{c}_1(s) + (1 - t)\bar{c}_2(s) \ .$$

On vérifie que $\overline{H}$ est une déformation continue entre $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$. De plus, pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$\overline{H}(t, 2\pi) = 2\pi d^\circ c_1 \ .$$

On en déduit par passage au quotient une application :

$$H : [0, 1] \times S^1 \to S^1 \ ,$$

qui est une homotopie entre c_1 et c_2.

1.5 Nombre d'enroulement

Définition Soit $f : S^1 \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée. Le nombre d'enroulement de f est le degré de l'application $\tau : S^1 \to S^1$. Noté enroul(f).

Propriété Indépendant du paramétrage choisi, à condition qu'il préserve l'orientation.

Preuve Le degré est invariant par homotopie !

Définition Pour une courbe orientée, le nombre d'enroulement est défini en choisissant une paramétrisation.

Définition Pour une courbe non orientée, il est défini au signe près.

Propriété Le nombre d'enroulement est invariant par déformation.

Preuve Invariance par homotopie du degré.

Théorème Pour toute courbe fermée paramétrée à vitesse 1, $f : S^1 \to \mathbf{R}^2$, on a :

$$\int k(s)ds = 2\pi \mathrm{enroul}(f) \ .$$

Preuve On a vu que $k(s)$ est la vitesse (orientée) de variation de $\tau(s)$ par rapport à s. Sur tout intervalle, l'intégrale de $k(s)$ est donc la variation totale de $\tau(s)$. Donc l'intégrale sur S^1 de $k(s)$ est égale à 2π fois le nombre de tours effectués par τ. qed.

Définition Homotopie entre courbes fermées orientées.

Théorème Les courbes fermées orientées sont classifiées, à homotopie près, par leur nombre d'enroulement.

Traduction Deux courbes fermées orientées sont homotopes ssi elles ont le même nombre d'enroulement.

Preuve Si deux courbes sont homotopes, alors elles ont même nombre d'enroulement, par invariance du nombre d'enroulement par déformation.

Réciproquement, soit c_1 et c_2 deux courbes orientées ayant le même nombre d'enroulement n. On veut montrer qu'elles sont homotopes. On note qu'il suffit de montrer le résultat si c_1 et c_2 sont de longueur 2π, sinon on fait une déformation homothétique, etc.

On choisit des paramétrages f_1, f_2 paramétrées à vitesse 1. Quitte à faire des translations, on suppose que $f_1(0) = f_2(0) = 0$. On appelle τ_1, τ_2 les vecteurs unitaires tangents associés, ainsi $d^\circ \tau_1 = d^\circ \tau_2 = n$.

D'après le théorème de classification des applications de S^1 dans S^1, il existe une homotopie $H : [0,1] \times S^1 \to \mathbf{R}^2$ de τ_1 sur τ_2. On pose alors, pour $t \in [0,1]$ et $s \in [0, 2\pi]$:

$$F(t,s) = \int_0^s H(t,u)du - \frac{s}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(t,u)du \ .$$

On note que :

1. F est une application régulière (C^1 ici).
2. On a :

$$\begin{aligned} F(0,s) &= \int_0^s H(0,u)du - \frac{s}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(0,u)du \\ &= \int_0^s \tau_1(u)du - \frac{s}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_1(u)du \\ &= f_1(s) - 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f_1(s) \\
F(1,s) &= \int_0^s H(1,u)du - \frac{s}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(1,u)du \\
&= f_2(s)
\end{aligned}
$$

3. Pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$
F(t,2\pi) = \int_0^{2\pi} H(t,s)ds - \frac{2\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(t,s)ds = 0 = F(t,0) \ ,
$$

si bien que $F(t,\cdot)$ définit bien une application de S^1 dans S^1.

4. Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $s \in S^1$:

$$
\frac{d}{ds}F(t,s) = H(t,s) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(t,u)du \neq 0 \ ,
$$

car $(1/2\pi)\int_0^{2\pi} H(t,u)du$ est un barycentre de points de S^1, donc est dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1.

Donc F est bien une homotopie entre f_1 et f_2.

ADMIS Une courbe fermée simple a pour nombre d'enroulement 1 ou -1.

1.6 Indice d'une courbe par rapport à un point

Définition Soit $f : S^1 \to \mathbf{R}^2$ une application régulière, et soit x_0 un point de $\mathbf{R}^2 \setminus f(S^1)$. On appelle indice de f par rapport à x_0 le degré de l'application :

$$
\begin{array}{ccc}
S^1 & \to S^1 & \\
s & \mapsto & \dfrac{f(s)-x_0}{\|f(s)-x_0\|}
\end{array}
$$

On le note $\mathrm{ind}_{x_0} f$.

NB On peut considérer ici les courbes continues, et pas seulement les courbes régulières. La dérivée peut s'annuler.

Propriété Indépendant de la paramétrisation à condition que l'orientation reste la même.

Définition Si c est une courbe fermée orientée, et si $x_0 \notin c$, l'indice de c par rapport à x_0 est défini en choisissant une paramétrisation.

Remarque L'indice est défini pour les applications régulières, et non pas seulement pour les courbes !

Lemme L'indice est invariant par déformation parmi les applications régulières dont l'image ne contient pas x_0.

Preuve Invariance du degré des applications par déformation.

Lemme Soit Ω la composante connexe de x_0 dans $\mathbf{R}^2 \setminus f(S^1)$. Pour tout $x \in \Omega$, on a : $\mathrm{ind}_x f = \mathrm{ind}_{x_0} f$.

Preuve Invariance par déformation encore !

Remarque Supposons qu'il existe une demi-droite issue de x_0 qui ne rencontre pas c. Alors $\text{ind}_{x_0}c = 0$.

Preuve le degré correspondant est 0 car c'est celui d'une application non surjective.

Corollaire S'il existe une courbe continue g issue de x_0 et allant à l'infini sans rencontrer c, alors $\text{ind}_{x_0}c = 0$.

Preuve Pour t assez grand on a $\text{ind}_{g(t)}c = 0$, d'après la remarque précédente. Donc par invariance par déformation on a aussi $\text{ind}_{g(0)}c = 0$.

1.7 Théorème de Jordan

Motivations Montrer que le complémentaire d'une courbe fermée simple est bien comme on le croit. Pas aussi facile qu'on peut l'imaginer – surtout pour une courbe qui est seulement continue, dans ce cas c'est assez subtil ! Mais on se limite ici au cas des courbes régulières, bcp plus facile. On va utiliser des outils topologiques qu'on vient de voir.

Définition Une courbe est **simple** si elle est paramétrée par une application injective.

Théorème Soit c une courbe fermée simple dans $\mathbf{R}^2$. Alors $\mathbf{R}^2 \setminus c$ a exactement deux composantes connexes C_{int} et C_{ext}, avec les propriétés suivantes :

- $\overline{C_{\text{int}}}$ est compact, $\overline{C_{\text{ext}}}$ ne l'est pas ;
- pour tout $x \in C_{\text{int}}$, $\text{ind}_x c = \pm 1$;
- pour tout $x \in C_{\text{int}}$, $\text{ind}_x c = 0$.

La preuve est repoussée un peu plus loin.

Lemme Soit $m \in c$, et soient u, v deux points de la normale à c en m, situés de part et d'autre de m et assez proches. Alors :

$$|\text{ind}_u c - \text{ind}_v c| = 1 \ .$$

Preuve Par étapes.

1. Choix d'un petit rectangle R centré sur m, où c est un graphe.
2. Homotopie de c à support dans R, pour remplacer l'intersection de c avec R par un chemin constitué de deux segments "verticaux" dans le bord, et du segment "horizontal" central.
3. On déplace u et v pour qu'ils soient à distance ϵ de m sur la normale – ca ne change pas l'indice. On choisit une paramétrisation de c par $h : S^1 \to \mathbf{R}^2$ telle que le segment central de la boite correspond à $[-1, 1]$.
4. On pose :

$$\begin{aligned} f : t &\mapsto \frac{h(t) - u}{\|h(t) - u\|} \ , \\ g : t &\mapsto \frac{h(t) - v}{\|h(t) - v\|} \ . \end{aligned}$$

On veut montrer que $|d^\circ f - d^\circ g| = 1$. On note que, si ϵ est assez petit, on a : $|f(t) - g(t)| \leq 1/10$ pour $t \notin [-1, 1]$.

5. On note $\overline{f}$ et $\overline{g}$ des relevés de f, g en des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, avec $\overline{f}(x + 2\pi) = \overline{f}(x) + 2\pi d^\circ f$, et de même pour g. On les choisit telles que $|\overline{f}(1) - \overline{g}(1)| \leq 1/10$. Alors pour tout $t \in [1, 2\pi - 1]$, $|\overline{f}(t) - \overline{g}(t)| \leq 1/10$.
6. La variation totale de $\overline{f}$ sur $[-1, 1]$ correspond au passage de $-\pi + \alpha$ à $-\alpha$, c'est donc $\pi - 2\alpha$, avec α petit dépendant de ϵ ; de même la variation totale de $\overline{g}$ est $2\alpha - \pi$.

7. On ajoute les majorations pour obtenir finalement :

$$|2\pi d^\circ f - 2\pi d^\circ f - 2\pi| \leq 4\alpha + 2/10 ,$$

et comme c'est un multiple de 2π, on a $|d^\circ f - d^\circ g - 1| = 0$. qed.

Preuve du théorème de Jordan D'après le lemme précédent, ind$c$ prend au moins deux valeurs différentes, donc $\mathbf{R}^2 \setminus c$ a au moins deux composantes connexes.

On veut montrer qu'elle en a au plus deux. Soit $h : S^1 \to \mathbf{R}^2$ une paramétrisation de c. On définit une application : $\Phi : S^1 \times [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbf{R}^2$, qui à (s, t) associe le point à distance (orientée) t sur la normale (orientée) à c en $h(s)$. C'est une application continue, telle que :

– si ϵ est assez petit :

$$\Phi(S^1 \times]0, \epsilon[) \subset \mathbf{R}^2 \setminus c ,$$
$$\Phi(S^1 \times]-\epsilon, 0[) \subset \mathbf{R}^2 \setminus c ,$$

– tout point de $\mathbf{R}^2 \setminus c$ assez proche de c est dans $\Phi(S^1 \times]-\epsilon, \epsilon[\setminus\{0\})$.

D'après le premier point et le lemme, $\Phi(S^1 \times]-\epsilon, \epsilon[) \setminus c$ a deux composantes connexes ; d'après le second point, toute composante connexe de $\mathbf{R}^2 \setminus c$ doit contenir c dans son adhérence, et donc contenir $\Phi(S^1 \times]0, \epsilon[)$ ou bien $\Phi(S^1 \times]-\epsilon, 0[)$. Donc $\mathbf{R}^2 \setminus c$ a exactement deux composantes connexes, soit C_1 et C_2.

$\overline{C_1}$ et $\overline{C_2}$ ne sont pas toutes deux compactes, car leur réunion est $\mathbf{R}^2$.

Soit R telle que $B(0, R) \supset c$. Alors $\mathbf{R}^2 \setminus B(0, R)$ est contenu dans C_1 ou dans C_2, et ind$c$ y est 0, et cette composante n'est pas compacte. Sur l'autre composante, ind$c = \pm 1$, donc cette composante est contenue dans $B(0, R)$, et donc elle est d'adhérence compacte.

Définition Aire de l'intérieur de la courbe c. Notée Aire(c).

1.8 Inégalité isopérimètrique

Motivations Outil fondamental (dans un cadre plus général) en géométrie riemannienne. Reviendra (peut-être...) dans la suite sous forme plus générale. Historique intéressant : problème de Didon, etc.

Théorème Soit c une courbe fermée simple régulière, on a :

$$L(c)^2 \geq 4\pi \text{Aire}(c) .$$

avec égalité ssi c est un cercle.

Lemme (inégalité de Wirtinger). Soit $f \in C^1(\mathbf{R})$ une fonction 2π-périodique de moyenne nulle, on a :

$$\int_0^{2\pi} f'^2(t)dt \geq \int_0^{2\pi} f^2(t)dt ,$$

avec égalité ssi $f(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$.

Preuve $f \in L^2$ donc elle est égale au sens L^2 à sa série de Fourier, et de même pour f', etc.

Preuve de l'inégalité isopérimètrique On se ramène par homothétie à une courbe de longueur 2π, avec une paramétrisation à vitesse constante $h : S^1 \to \mathbf{R}^2$. On se ramène par une translation au cas où 0 est le centre de gravité de c, i.e. si $h = (f, g)$, on a :

$$\int f = \int g = 0 .$$

Comme on a paramétrisation à vitesse 1, on a :

$$\int f'^2 + g'^2 = 2\pi = L(c) ,$$

alors que :

$$\text{Aire}(c) = \int f(t)g'(t)dt \ .$$

Donc :

$$2(\pi - \text{Aire}(c)) = \int f'^2 + g'^2 - 2fg'dt = \int (f'^2 - f^2)dt + \int (f - g')^2 dt \ .$$

Mais d'après le lemme, la première intégrale est positive, donc $2\pi - 2\text{Aire}(c) \geq 0$.

Le cas d'égalité correspond à un cercle paramétré à vitesse 1.

1.9 Convexité

Théorème Soit c une courbe fermée simple dans $\mathbf{R}^2$. Il y a égalité entre :

1. k garde un signe constant, i.e. $k \leq 0$ partout ou $k \geq 0$ partout ;
2. $\int_c |k| = 2\pi$;
3. c reste d'un seul coté de chacune de ses tangentes ;
4. deux points de l'intérieur de c sont joints par un segment dans C_{int}.

Définition Une courbe vérifiant ces propriétés est dite **convexe**.

Preuve (1) $\mapsto$ (2) : évident puisque $\int k = \pm 2\pi$.

(2) $\mapsto$ (1) : de même, car le nombre d'enroulement est ± 1.

(1) $\mapsto$ (3) : on se donne une paramétrisation f de c. (1) et (2) impliquent que τ parcourt une fois S^1, et que chaque point de S^1 est atteint pour un unique point de c. On suppose qu'il existe deux points p, q qui sont de part et d'autre de la tangente Δ_m à $m \in c$. On considère une normale unitaire n à c en m, et la fonction :

$$\begin{array}{rrl} h: & S^1 \to & \mathbf{R} \\ & s \mapsto & \langle f(t) - m, n \rangle \ . \end{array}$$

Alors f prend des valeurs positives et negatives (cf. p, q), donc un max > 0 et un min < 0, et donc 3 points critiques (avec m). Ceci contredit le fait que n et $-n$ sont atteints chacun une fois au plus.

(3) $\mapsto$ (4) : On fixe $x \in C_{\text{int}}$, et on note Ω_x l'ensemble des points de C_{int} qui sont joints par un segments géodésique dans C_{int}. Soit $y \in \partial\Omega_x$, et soit Δ la droite passant par x et y, alors Δ doit être tangente à c entre x et y, du coté de C_{int}. Puis même argument que plus haut avec normale unitaire pour montrer qu'il existe un point où la tangente est du coté de C_{ext}.

(4) $\mapsto$ (1) : On montre la contraposée. On suppose donc que, au voisinage de m, c est le graphe d'une fonction f avec $f(s) = 0$ pour $s \in [0, l]$, $f''(s) \geq 0$ pour $s \geq l$, et $f''(s) \leq 0$ pour $s \leq 0$, sur $[-\epsilon, l + \epsilon]$. On suppose (sans perte de généralité) que C_{int} est en-dessous du graphe. On choisit $a \in [0, \epsilon]$, et $b > 0$ très petit.

On considère les points $m_+ = (l + a, f(l + a) - b)$ et $m_- = (l, -b)$, on remarque qu'ils sont dans C_{int} pour b assez petit. On va montrer que le segment qui les joint rencontre C_{ext}. C'est le graphe d'une fonction g, on considère $f - g$, on a :

$$\begin{array}{r} (f - g)(l) = (f - g)(l + a) = b \\ (f - g)'' \geq 0 \quad \text{sur} \quad [l, l + a] \end{array}$$

Donc $f - g < 0$ entre l et $l + a$ si b est assez petit, donc $[m_-, m_+]$ rencontre C_{ext}.

Chapitre 2

Courbes dans $\mathbf{R}^3$

Objectifs :
- définitions etc.
- géométrie locale : courbure, torsion, etc.
- théorème fondamental : la courbure et la torsion permettent de reconstruire la courbe.
- théorème de Fenchel : intégrale de courbure $\geq 2\pi$.
- courbes nouées. Un peu de topologie.
- théorème de Fairy-Milnor : les courbes nouées ont une intégrale de courbure au moins 4π.

2.1 Définitions des courbes

Définition Courbes paramétrées, géométriques, orientées, etc.

Définition Tangente à une courbe en un point, vecteur tangent unitaire.

2.2 Repère de Serret-Frénet

Définition Soit $f : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe paramétrée à vitesse 1. La courbure de f en s est $k(s) := \|f''(s)\|$.

NB $k(s) \in \mathbf{R}_+$, différent des courbes dans $\mathbf{R}^2$!

NB invariant par changement d'orientation.

Définition Si $k(s) \neq 0$, on appelle vecteur normal à f en s le vecteur unitaire dans la direction de $f''(s)$. Noté $n(s)$.

Rappel Produit vectoriel dans $\mathbf{R}^3$.

Définition Si $k(s) \neq 0$, on note $t(s) := f'(s)$, et $b(s) := t(s) \wedge n(s)$. $b(s)$ est le vecteur **binormal**.

Propriété Pour $k(s) \neq 0$, $(t(s), n(s), b(s))$ forment un trièdre orthonormé, le trièdre de Frénet.

Remarque $b'(s)$ est orthogonal à $b(s)$ et à $t(s)$. En effet :
- $\langle b', b\rangle = 0$ par $\|b\| = 1$.
- $b' = (t \wedge n)' = t' \wedge n + t \wedge n' = t \wedge n'$, car $t' = f'' = kn$, donc $b' \perp t$.

Définition Lorsque $k \neq 0$, le nombre $\tau(s)$ défini :

$$b'(s) = \tau(s)n(s)$$

est la torsion de f en s.

Définition Pour $k \neq 0$, le plan engendré par $t(s)$ et $n(s)$ est le plan osculateur à f en s.

Interprétations par le comportement de la courbe, à l'ordre trois, par rapport à son plan osculateur (utiliser un développement limité).

2.3 Formules de Frénet

Lemme En tout point $s \in I$, on a :

$$\begin{cases} t' &= kn \\ n' &= -kt - \tau b \\ b' &= \tau n \end{cases}$$

Preuve On a (1) et (3) par construction. On note que $n = b \wedge t$, donc :

$$\begin{aligned} n' &= b' \wedge t + b \wedge t' \\ &= (\tau n \wedge t) + b \wedge (kn) \\ &= -\tau b - kt \ , \end{aligned}$$

donc (2).

Vocabulaire
- plan osculateur : engendré par t, n.
- plan rectificateur : par t, b.
- plan normal : par b, n.

2.4 Théorème fondamental

Théorème fondamental de la théorie locale des courbes Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, $k : I \to \mathbf{R}_+^*$ et $\tau : I \to \mathbf{R}$. Il existe une courbe f paramétrée à vitesse 1 dont la courbure est k et la torsion τ. f est unique aux isométries globales de $\mathbf{R}^3$ près.

NB Unicité – cad on peut faire un déplacement pour envoyer une solution sur une autre.

Preuve Existence : par existence des solutions aux ODE – à vérifier pour ceux qui connaissent.
Unicité : on suppose donnés $f, \overline{f}$ deux solutions, avec $t(0) = \overline{t}(0)$, etc. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|t-\overline{t}\|^2 + \|n-\overline{n}\|^2 + \|b-\overline{b}\|^2) &= \langle t-\overline{t}, t'-\overline{t}'\rangle + \langle n-\overline{n}, n'-\overline{n}'\rangle + \langle b-\overline{b}, b'-\overline{b}'\rangle \\ &= k\langle t-\overline{t}, n-\overline{n}\rangle + \tau\langle b-\overline{b}, n-\overline{n}\rangle - k\langle n-\overline{n}, t-\overline{t}\rangle - \tau\langle n-\overline{n}, b-\overline{b}\rangle \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

NB Pas vrai pour les courbes fermées – car la courbe qu'on "reconstruit" ne se referme pas en général.

2.5 Le théorème de Fenchel

Théorème Soit $f : S^1 \to \mathbf{R}^3$ une courbe fermée. Alors :

$$\int_{S^1} k \geq 2\pi \ ,$$

avec égalité ssi f est une courbe plane convexe.

Remarque

- pour une courbe paramétrée à vitesse 1, $f : \mathbf{R}/L\mathbf{Z}$, on a :

$$\int_{S^1} k = \int_0^L k(s)ds \ .$$

- Cas d'égalité clair dans le cas des courbes planes.
- Preuve repoussée après une petite introduction à la théorie des surfaces — anticipation sur la suite.

Aire des domaines de S^2 Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ouvert à bord régulier par morceaux, et soit $f : \Omega \to S^2$ un difféo local injectif préservant l'orientation. On définit :

$$\mathrm{Aire}(f) = \int_\Omega \langle \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}, f \rangle dxdy \ .$$

Alors $\mathrm{Aire}(f)$ ne dépend que de l'image $f(\Omega)$.

Preuve On se donne un autre couple $(\overline{\Omega}, \overline{f})$ avec $\overline{f}(\overline{\Omega}) = f(\Omega)$. On pose $h = f \circ \overline{f}^{-1} : \Omega \to \overline{\Omega}$. Alors $f = \overline{f} \circ h$. En chaque point de $f(\Omega)$ on choisit un repère orthonormé $(u(m), v(m)$ de $f(m)^\perp = T_m S^2$. On appelle $M(x,y)$ la matrice de $d_{(x,y)}f$ dans les bases (e_1, e_2) et (u,v). Alors :

$$\det(M(x,y)) = \langle \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}, f \rangle \ .$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aire}(f) &= \int_\Omega \langle \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}, f \rangle dxdy \\
&= \int_\Omega \det(M(x,y)) dxdy
\end{aligned}$$

On note de même $\overline{M}$ la matrice pour $\overline{f}$, et N la matrice jacobienne de h. Alors $M(x,y) = \overline{M}(h(x,y))N(x,y)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aire}(f) &= \int_\Omega \det(M(x,y)) dxdy \\
&= \int_\Omega \det(\overline{M}(h(x,y))) \det(N(x,y)) dxdy \\
&= \int_{\overline{\Omega}} \det(\overline{M}(h(x,y))) dxdy \\
&= \int_{\overline{\Omega}} \langle \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \overline{f}}{\partial y}, \overline{f} \rangle \\
&= \mathrm{Aire}(\overline{f}) \ .
\end{aligned}$$

Définition On pose $\mathrm{Aire}(f(\Omega)) := \mathrm{Aire}(f)$.

Preuve du théorème de Fenchel On considère $f : \mathbf{R}/L\mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$. Il suffit de montrer le théorème dans le cas où k ne s'annule qu'en un nombre fini de points (sinon perturbation).

Tube autour de f, donné par :

$$X(s,\theta) = f(s) - \epsilon(n\cos\theta + b\sin\theta) \ .$$

Bien défini en dehors des points isolés où $k = 0$. On appelle $N(s,\theta)$ la normale intérieure au tube, cad que $N(s,\theta) = b\sin\theta + n\cos\theta$.

On note :

$$T = X(\mathbf{R}/L\mathbf{Z}, S^1) \ ,$$
$$R = X(\mathbf{R}/L\mathbf{Z},]-\pi/2, \pi/2[) \ ,$$
$$\overline{R} = X(\mathbf{R}/L\mathbf{Z}, [-\pi/2, \pi/2]) \ ,$$
$$S = X(\mathbf{R}/L\mathbf{Z},]\pi/2, 3\pi/2[) \ ,$$

La preuve repose sur les propositions suivantes, qui impliquent la partie inégalité du théorème.

Proposition 1 L'application $N : \overline{R} \to S^2$ est surjective.

Proposition 2 $\mathrm{Aire}(N(\overline{R})) = 2\int_0^L k(s)ds$.

La preuve de la proposition 1 repose sur le :

Lemme Si ϵ est assez petit, alors, aux points de R, R reste d'un seul coté de son plan tangent. Aux points de S, S rencontre son plan tangent le long de courbes.

Preuve On calcule le comportement de X par rapport à son plan tangent. Calcul explicite du produit scalaire avec N des dérivées secondes de X par rapport à s, θ. Calcul du déterminant :

$$\det M(s,\theta) = \epsilon(1 + \epsilon k\cos\theta)k\cos\theta \ .$$

Donc M est définie positive lorsque $\cos\theta > 0$, et définie négative quand $\cos\theta < 0$.

Preuve de la proposition 1 Soit $N_0 \in S^2$. On veut montrer qu'il existe $(s,\theta) \in \overline{R}$ telle que la normale intérieure à X en (s,θ) est N_0. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on considère :

$$P_t := \{m \in \mathbf{R}^3 \mid \langle m, N_0\rangle = t\} \ .$$

Puis t_0 est l'inf des t tels que intersection non nulle avec T, et on vérifie que ok.

Preuve de la proposition 2 On a :

$$N(s,\theta) = \cos(\theta)n + \sin(\theta)b \ ,$$
$$\partial_s N \wedge \partial_\theta N = k\cos\theta N \ ,$$
$$\langle \partial_s N \wedge \partial_\theta N, N\rangle = k\cos\theta \ .$$

Donc par définition de l'aire :

$$\mathrm{Aire}(N(R)) = \int_0^L k(s)\cos\theta d\theta ds = 2\int_0^L k(s)ds \ .$$

Cas d'égalité dans le théorème Pour le cas d'égalité, il suffit de montrer que, si l'image de f n'est pas planaire, alors $N_{|R}$ n'est pas injective. Or si f n'est pas planaire, il existe un plan (orienté) P que f traverse 4 fois au moins. On note P_t les parallèles à P à distance (orientée) t. On considère les deux segments (au moins) de $\mathrm{Im} f \setminus P$ qui sont au-dessus de P, et les valeurs maxima des valeurs de t atteintes, soit t_1 et t_2, atteintes en s_1 et s_2. On suppose que les P_{t_i} ne sont pas les plans osculateurs de $\mathrm{Im} f$ aux maxima – sinon on modifie un peu P.

On vérifie alors que la normale orientée à P est dans $N(s_1,]-\pi/2, \pi/2[)$ et $N(s_2,]-\pi/2, \pi/2[)$.

2.6 Noeuds

Définition Soit c une courbe fermée plongée dans $\mathbf{R}^3$. c est non nouée s'il existe un plongement $\phi : D^2 \to \mathbf{R}^3$, telle que $\phi(\partial D^2) = c$. Sinon elle est nouée.

Lemme Soit $(c_t)_{t\in[0,1]}$ une famille à un paramètre de courbe fermées plongées. c_1 est nouée si et seulement si c_0 l'est.

Admis (on peut expliquer l'heuristique).

2.7 Le théorème de Fairy-Milnor

Théorème Soit c une courbe plongée nouée dans $\mathbf{R}^3$. Si c est nouée, alors l'intégrale de sa courbure est au moins 4π.

Preuve On suppose que l'intégrale de la courbure de c est inférieure à 4π. On reprend le cadre de la démonstration du théorème de Fenchel, on voit qu'il existe un élément de $N_0 \in S^2$ dont un voisinage dans S^2 est atteint une seule fois par $N_{|R}$, et on note P_0 le plan orienté dont la normale est N_0. D'après le raisonnement précédent, les parallèles P_t à P_0 rencontrent c en deux points au plus.

On change la paramétrisation de c et on effectue un déplacement et une homothétie, pour obtenir une paramétrisation de la forme :

$$\begin{array}{rrl} f: & S^1 \to & \mathbf{R}^3 \\ & \theta \mapsto & (x(\theta), y(\theta), \sin\theta)) \end{array}$$

Pour $z \in [-1, 1]$, on pose :

$$m_+(z) = (x(\arcsin(z)), y(\arcsin(z))), m_-(z) = (x(\pi - \arcsin(z)), y(\pi - \arcsin(z))) \ .$$

On définit alors ϕ par :

$$\begin{array}{rrl} f: & D^2 \to & \mathbf{R}^3 \\ & (X,Z) \mapsto & \left(\dfrac{\sqrt{1-Z^2}-X}{2\sqrt{1-Z^2}} m_-(Z) + \dfrac{\sqrt{1-Z^2}+X}{2\sqrt{1-Z^2}} m_+(Z), Z \right) \ . \end{array}$$

On note que ϕ est un plongement du disque dont les valeurs aux bords sont les points de c. q.e.d.

NB traitement spécial pour les points maximaux et minimaux de Z sur D^2, à préciser à la fin de la preuve.

Chapitre 3

Théorie locale des surfaces dans $\mathbf{R}^3$

Motivation

Def des surfaces : on veut définir les surfaces dans $\mathbf{R}^3$ d'une manière qui correspond à l'idée intuitive qu'on en a. Ce n'est pas si facile, il faut des précautions.

Connexions : c'est une notion fondamentale, qui permet de comparer des vecteurs en des points proches.

Métriques induites sur les surfaces Notion naturelle, e.g. pour la distance sur la surface de la terre.

Invariants locaux des surfaces Ecart au plan tangent, puis on en déduit la notion de courbure et de courbure moyenne de la surface.

Courbure Le point crucial est que c'est un invariant **intrinsèque** des surfaces, c'est le théorème Egregium de Gauss. On définit ici la courbure d'une manière intrinsèque, proche de ce qui se généralise dans un cadre beaucoup plus vaste.

3.1 Définitions des surfaces

Définition Une surface est un sous-ensemble $S \subset \mathbf{R}^3$ tel que, pour tout $x \in S$, il existe un voisinage U de x et une fonction $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ telle que $f^{-1}(0) \cap U = S \cap U$, et que df ne s'annule pas sur S.

Propriété Soit $x \in S$; il existe un voisinage U de x dans $\mathbf{R}^3$, un voisinage V de 0 dans $\mathbf{R}^2$ et une application régulière $\phi : V \to \mathbf{R}^3$, injective, dont la différentielle est partout de rang 2, telle que $S \cap U = \phi(V)$.

Propriété Equivalent à demander qu'il existe, au voisinage de tout point, une fonction à valeurs réelles dont l'ensemble considéré est une surface de niveau.

3.2 Applications régulières

3.3 Connection dans $\mathbf{R}^3$

Définition D^0 connection canonique sur $\mathbf{R}^3$, comme application bilinéaire sur les champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^3$. Par :

$$D^0_X Y = (dy_1(X), dy_2(X), dy_3(X)) \ .$$

Propriété On a les propriétés suivantes :

1. linéaire par rapport au premier vecteur.
2. $D^0_X fY = f D^0_X Y + df(X)Y$.
3. compatible avec la métrique.

Définition Transport parallèle le long d'une courbe.

Définition Crochet de Lie : $[X,Y] = D^0_X Y - D^0_Y X$.

Définition $X.f = df(X)$.

Propriété Soit f une fonction sur $\mathbf{R}^3$, et soit X, Y deux champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^3$. Alors :

$$X.(Y.f) - Y.(X.f) = [X,Y].f \ .$$

Identité de Jacobi $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.
Preuve en utilisant la propriété précédente.

3.4 Vecteurs tangents

Définition Plan tangent en un point $s \in S$: $\mathrm{Im} d_0 f$, où f est un paramétrage local en s. On le note $T_s S$.

Définition Plan affine tangent le sous-espace affine de $\mathbf{R}^3$ des points de la forme $s + x$, où $x \in T_s S$.

Définition Champs de vecteurs tangents à une surface.

NB Les champs de vecteurs définissent des "dérivations" sur l'espace des fonctions régulières sur une surface.

Remarque Si X, Y sont deux vecteurs tangents à S, on définit $[X,Y]$ par extension de X et Y au voisinage de S, et on remarque que $[X,Y]$ sur S ne dépend pas de l'extension choisie.

Proposition Soit X et Y des champs de vecteurs de $\mathbf{R}^3$, qui sont tangents à S. Alors $[X,Y]$ est tangent à S, et la restriction de $[X,Y]$ à S ne dépend que des restrictions de X et de Y à S.

Preuve Soit f une fonction définissant localement S, on lui applique la pté plus haut.

Définition Crochet de Lie de deux champs de vecteurs tangents à S, comme un champ de vecteurs tangent à S.

Fonctorialité Soit S et S' deux surfaces, et ϕ une application régulière de S dans S' dont la différentielle est partout injective. Alors ϕ préserve le crochet de Lie.

Preuve En utilisant l'action sur les fonctions.

3.5 Métrique induite

Métrique induite

Longueurs des courbes

Distance

Inégalité triangulaire

Aire

3.6 Invariants locaux

Opérateur de forme $BX = D^0N$, où N est un champ de vecteurs normaux unitaires à S.

Proposition B est symétrique pour I.

Preuve Par crochet de Lie dans $\mathbf{R}^3$ et propriété que le crochet de deux vecteurs tangents à S est tangente à S, donc :

$$\begin{aligned} I(BX,Y) - I(BY,X) &= \langle D^0_X N, Y\rangle - \langle D^0_Y N, X\rangle \\ &= X.\langle N, Y\rangle - \langle N, D^0_X Y\rangle - Y.\langle N, X\rangle + \langle D^0_Y X, N\rangle \\ &= \langle [X,Y], N\rangle \end{aligned}$$

Courbures principales Valeurs propres de B. Les vecteurs propres sont les directions principales, leurs courbes intégrales les lignes de courbure. Les directions principales sont orthogonales.

Définition Un point où les deux courbures principales sont égales est **ombilique**. Ressemble localement à une sphère.

Propriété Soit P un plan normal à S en un point s ; l'intersection de S avec P est une courbe dont la courbure est :

$$k = k_1\langle v, e_1\rangle^2 + k_2\langle v, e_2\rangle^2 \ .$$

Preuve Soit v le vecteur unitaire dans l'intersection. On étend v en un champs de vecteur sur S au voisinage de s.

$$\begin{aligned} k &= \langle D^0_v v, N\rangle \\ &= v.\langle v, N\rangle - \langle v, D^0_v N\rangle \\ &= II(v,v) \\ &= \|\langle e_1, v\rangle e_1 + \langle e_2, v\rangle e_2\|^2_{II} \end{aligned}$$

et la suite suit de la définition des courbures principales.

Seconde forme fondamentale $II(X,Y) = -I(BX,Y)$.

Propriété $\langle D^0_X Y, N\rangle = II(X,Y)$.

Preuve

$$\begin{aligned} \langle D^0_X Y, N\rangle &= X.\langle Y, N\rangle - \langle Y, D^0_Y N\rangle \\ &= \langle Y, BX\rangle \end{aligned}$$

Interprétation simple Soit S le graphe d'une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, avec $f(0) = df(0) = 0$. Alors la seconde forme fondamentale de S en 0 est le Hessien de f en 0.

Troisième forme fondamentale $III(X,Y) = I(BX,BY)$.

NB III est une forme bilinéaire positive, et définie positive sauf lorsque une courbure principale est nulle.

Application de Gauss

NB notion de métrique "tirée" de celle de S^2 pour III.

Proposition $III(X,Y) = I_{S^2}(dN(X), dN(Y))$.

Courbure moyenne $2H = -\mathrm{Tr}(B)$.

Courbure de Gauss On définit la courbure de Gauss $\overline{K} := \det(B)$.

Proposition $\overline{K}$ est le rapport des éléments d'aires entre domaines qui se correspondent par N sur (S,I) et sur S^2.

Directions asymptotiques

3.7 Connexion sur S

Proposition Soit X et Y des champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^3$ tangents à S. Alors la restriction de $D^0_X Y$ à S ne dépend que des restrictions de X et Y à S.

Définition $D_X Y = D^0_X Y - II(X,Y)N$. Partie tangente de D^0. Possible grâce à la proposition précédente.

Théorème D vérifie les propriétés suivantes.
- $D_{fX} Y = f D_X Y$;
- $D_X(fY) = f D_X Y + (X.f)Y$;
- $D_X Y - D_Y X = [X,Y]$;
- $X.I(Y,Z) = I(D_X Y, Z) + I(Y, D_X Z)$.

Théorème D est uniquement déterminé par les propriétés ci-dessus et par I.

Preuve Par formule de définition :

$$2I(D_X Y, Z) = X.I(Y,Z) + Y.I(X,Z) - Z.I(X,Y) + I([X,Y],Z) + I([Z,X],Y) + I([Z,Y],X)\ .$$

Transport parallèle le long des courbes

3.8 Géodésiques

Remarque Soit $c : [0,1] \to S$ une courbe régulière. Soit X un champ de vecteurs sur S. Alors $D_{c'(t)}X$ ne dépend que de la restriction de X à l'image de c.

Définition Si X est un champ de vecteur défini le long de c, on définit $D_{c'(t)}X$ par ...

Définition Soit $c : [0,1] \to S$ une courbe, on dit que c est une géodésique si $D_{c'}c'$ est partout parallèle à c'. Si u est le vecteur tangent unitaire à c, alors c est géodésique si et seulement si $D_{c'}u = 0$ partout.

Remarque Une géodésique c est paramétrée à vitesse constante si et seulement si $D_{c'}c' = 0$. Réciproquement, une courbe telle que $D_{c'}c' = 0$ est une géodésique paramétrée à vitesse constante.

Définition Soit $c : [0,1] \to S$ une courbe. L'énergie de c pour I est :

$$E(c) := \int_0^1 \|c'(t)\|_I^2 dt \ .$$

Proposition Soit $c : [0,1] \to S$ une courbe. c est une géodésique si et seulement si, pour toute déformation de c qui fixe les extrémités, la longueur de c reste constante au premier ordre. c est une géodésique paramétrée à vitesse constante ssi, pour toute déformation de c qui fixe les extrémités, $E(c)$ reste constante au premier ordre.

Preuve Premier point : on se donne une variation $(c_s)_{s\in[0,1]}$ de c, avec $c_s(0) = c(0)$ et $c_s(1) = c(1)$ pour tout s. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}\int_0^1 \|c_s'(t)\|_I^2 dt \\ &= 2\int_0^1 I(c_s', D_{\partial_s c_s'} c_s')dt \\ &= 2\int_0^1 I(c_s', D_{c_s'}\partial_s c_s')dt \\ &= 2\int_0^1 c_s'(t).I(c_s', \partial_s c_s') - I(D_{c_s'}c_s', \partial_s c_s')dt \end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial E}{\partial s} = 0$ pour toutes les variations si et seulement si $D_{c_s'}c_s' = 0$.

Pour le second point, on note $u_s(t)$ le vecteur tangent unitaire à c_s au temps t, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}\int_0^1 \|c_s'(t)\|_I dt \\ &= 2\int_0^1 \frac{I(c_s', D_{\partial_s c_s'} c_s')}{|c_s'\|_I}dt \\ &= 2\int_0^1 I(u_s(t), D_{c_s'}\partial_s c_s')dt \\ &= 2\int_0^1 c_s'(t).I(u_s, \partial_s c_s') - I(D_{c_s'}u_s, \partial_s c_s')dt \end{aligned}$$

et donc $\frac{\partial L}{\partial s} = 0$ pour toute variation ssi $D_{c_s'}u_s = 0$.

NB ! ! ! ! Le point délicat de la preuve précédente est la construction locale de déformations qui intègrent un champ de vecteur donné le long d'une courbe !

Remarque En fait les géodésiques minimisent localement la longueur – on le verra plus tard.

Application exponentielle

Théorème L'application exponentielle est un difféomorphisme local en 0.

3.9 Application exponentielle

Symboles de Christoffel $\Gamma^i_{j,k}$ dans un système de coordonnées, par $\Gamma^i_{j,k} = \langle D_{e_j}e_k, e_i\rangle$.

Propriété $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

Propriété Existence et unicité des géodésiques paramétrées à vitesse constante issues d'un point donné avec une vitesse donnée.

3.10 Théorème de Gauss

Opérateur de courbure Si X, Y et Z sont trois champs de vecteurs sur une surface S, on pose :

$$R(X,Y)Z = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X,Y]}Z \ .$$

C'est encore un champ de vecteurs sur S.

Interprétation R mesure le "défaut de commutation" quand on déplace Z sur une courbe intégrale de X puis de Y, ou le contraire. Explique les symétries et autres propriétés décrites plus bas.

Remarque Si on fait la même construction dans $\mathbf{R}^3$, et qu'on pose pour 3 champs de vecteurs de $\mathbf{R}^3$:

$$R^0(X,Y)Z = D^0_X(D^0_Y Z) - D^0_Y(D^0_X Z) - D^0_{[X,Y]}Z \ ,$$

on trouve 0 (calcul simple). Interprétation en terme de commutation de champs de vecteurs.

Lemme

1. $R(Y,X)Z = -R(X,Y)Z$.
2. $I(R_{X,Y}T, Z) = -I(R_{X,Y}Z, T)$.
3. La valeur de $R(X,Y)Z$ en un point ne dépend que de la valeur de X en ce point.
4. $R(X,Y)Z$ ne dépend que de la valeur de Y et Z au point considéré.

Preuve 1. Immédiat.
2. Par compatibilité de D avec I et explicite.
3. Il suffit de vérifier que, si $X = 0$, on trouve 0 (et de même pour Y). Pour ¸ca, on peut utiliser le lemme suivant.

Lemme Soit $F_s : T_sT \to T_sS$ une application régulière pour chaque s, qui varie régulièrement avec s. Soit X et Y deux champs de vecteurs avec $X(m) = 0$. Alors :

$$D_Y(F(X))(m) = F(D_Y X)(m) \ .$$

Preuve Passage dans $\mathbf{R}^3$ et application de la même chose pour D^0, qui est évidente.
4. Conséquence des propositions évidentes pour X et pour T, avec les points précédents.

Courbure intrinsèque $K = I(R(X,Y)Y, X)$ si (X,Y) forment un repère orthonormé.

Remarque Indépendant du choix de X et Y, en fait on aurait pu prendre $I(R_{X,Y}Y', X')$ où (X,Y) et (X', Y') forment deux bases orthonormées.

Courbure et cartes La courbure d'une surface est une mesure de sa "proximité à un plan". C'est d'ailleurs la motivation qu'avaient Gauss, puis Riemann, en introduisant cette notion.

Lemme Soit S une surface et $x \in S$. La courbure K s'annule au voisinage de x si et seulement si x a un voisinage isométrique à un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^2$.

Théorème de Gauss $K = \overline{K}$.

Remarque On en déduit que la courbure de Gauss ne dépend que de I ! Théorème Egregium.

Extension de D

Formule de Codazzi $(D_X II)(Y,Z) = (D_Y II)(X,Z)$.

Remarque On peut aussi dire : $(D_X B)(Y) = (D_Y B)(X)$.

Preuve On démontre ensemble la formule de Codazzi et le théorème de Gauss, en développant la formule qui exprime que la courbure de D^0 est nulle. On étend X, Y et Z en des champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^3$. Alors :

$$\begin{array}{rcl}
0 & = & R^0_{X,Y} Z \\
 & = & D^0_X D^0_Y Z - D^0_Y D^0_X Z - D^0_{[X,Y]} Z \\
 & = & D^0_X (D_Y Z + II(Y,Z)N) - D^0_Y (D_X Z + II(X,Z)N) - D_{[X,Y]} Z - II([X,Y],Z)N \\
 & = & D_X D_Y Z + II(X, D_Y Z)N + X.II(Y,Z)N - II(Y,Z)BX \\
 & - & D_Y D_X Z - II(Y, D_X Z)N - Y.II(X,Z)N + II(X,Z)BY \\
 & & -D_{[X,Y]} Z - II([X,Y],Z)N \\
 & = & R_{X,Y} Z - II(Y,Z)BX + II(X,Z)BY + (D_X II)(Y,Z) - (D_Y II)(X,Z)
\end{array}$$

Théorème fondamental de la théorie des surfaces Soit S une surface, considérée comme une variété “abstraite”. Soit h une métrique sur S, et soit $b_x : T_x S \to T_x S$, pour chaque $x \in S$, une application linéaire symétrique pour h. Il existe une immersion de S dans $\mathbf{R}^3$ dont la métrique induite est h est l’application de Weingarten est b ssi $d^D b = 0$ et $\det(b) = K$, où D est la connexion de h.

Preuve Repoussée à plus tard.

Chapitre 4

Surfaces spéciales

Préliminiaires topologiques

Définition Bord d'une surface.

Définition Surfaces à bord. Il existe des points qui ont un voisinage qui est l'image par un difféomorphisme d'un morceau de demi-plan.

Remarque Une surface dont le bord est non vide n'est pas toujours une surface à bord !

Définition On dit qu'une surface est complète si son bord est vide.

Définition On dit qu'une surface est fermée si elle est compacte (sans bord).

Remarque Une surface fermée est donc complète... Mais la réciproque est fausse.

Exemple $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ est fermée. $S^2 \cap \{z > 0\}$ n'est pas compacte. $S^2 \cap \{z \geq 0\}$ est compacte à bord. $\{x^2 + y^2 = z^2 - 1\}$ est complète.

Lemme Toute surface compacte admet une métrique riemannienne.

Preuve Repose sur les partitions de l'unité, etc. Admis ici.

4.1 Surfaces réglées et développables

Définition Un sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$ est réglé s'il contient un segment passant par chacun de ses points.

Exemple Soit $U \subset \mathbf{R}^3$, et soit V l'enveloppe convexe de U. Alors $\partial V \setminus U$ est un ensemble réglé.

Définition Une surfaces réglées est une surface qui contient une droite passant par chacun de ses points.

Exemple Paraboloïde hyperbolique, $z = xy$.

Remarque Propriété assez générale des quadriques !

Propriété $K \leq 0$.

Propriété Les droites contenues dans une surface réglée sont nécessairement des courbes asymptotiques. Plus généralement, une courbe contenue dans une surface est une droite de l'espace ambiant ssi elle est à la fois asymptotique et géodésique.

Remarque Dans la suite de cette section, on étudie les surfaces paramétrées sous la forme $X(t,s) = a(t) + sw(t)$, avec $\|w\| = 1$. Forme un peu particulière de surfaces réglées. Ici $t \in I$ et $s \in \mathbf{R}$ à priori. Permet des surfaces singulières à priori.

Surfaces cylindriques Une telle surface est dite "cylindrique" si w est constant. Correspond à un "cylindre" au dessus d'une courbe.

Définition Une surface réglée est dite non-cylindrique si $w' \neq 0$ partout.

NB Attention ¸ca n'est pas l'opposé d'une surface cylindrique...

ID On veut trouver une paramétrisation un peu plus contrainte, sous la forme $b(t)+w(t)s$, où $\langle b', w' \rangle = 0$ partout.

On la cherche sous la forme : $b(t) = a(t) + u(t)w(t)$, on doit avoir alors :

$$b' = a' + u'w + uw' \ ,$$

et b' orthogonal à w', donc :

$$u = -\frac{\langle a', w' \rangle}{\|w'\|^2} \ ,$$

Propriété b ne dépend pas du choix de a ; en effet ¸ca découle de l'unicité de b, on peut aussi le montrer directement.

Définition b est la **ligne de striction** de la surface.

ID On écrit maintenant la surface avec la paramétrisation : $X(t,s) = b(t) + sw(t)$.

Propriété Il existe une fonction f telle que $b' \wedge w = fw'$. Alors $\|X_t \wedge X_s\|^2 = (f^2 + s^2)\|w'\|^2$. f est le **paramètre de distribution** de la surface.

Propriété Les points singuliers d'une surface réglée se trouvent sur la ligne de striction $u = 0$, et ils apparaissent seulement si $f = 0$.

Théorème La courbure de Gauss de la surface est :

$$K = -\frac{f^2}{(f^2 + s^2)^2} \ .$$

En particulier, on retrouve que $K \leq 0$, avec 0 exactement sur les courbes qui rencontrent la ligne de striction en un point où $f = 0$.

Preuve On calcule les matrices M_I et M_{II} de I et II respectivement dans la base $(\partial_s X, \partial_t X)$. On a :

$$M_I = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \ , \ M_{II} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \ ,$$

avec :

$$a = \langle \partial_s X, \partial_s X \rangle = \langle w, w \rangle = 1 \ ,$$
$$b = \langle \partial_s X, \partial_t X \rangle = \langle w, b' + sw' \rangle = \langle w, b' \rangle \ ,$$

$$c = \langle \partial_t X, \partial_t X \rangle = \langle b' + sw', b' + sw' \rangle = \|b'\|^2 + s^2\|w'\|^2 \ ,$$

donc :

$$\det M_I = \|b'\|^2 + s^2\|w'\|^2 - \langle w, b' \rangle^2 = \|b' \wedge w\|^2 + s^2\|w'\|^2 = f^2\|w'\|^2 + s^2\|w'\|^2 \ .$$

Par ailleurs, on a aussi :

$$E = \langle \partial_s\partial_s X, N \rangle = 0 \ ,$$

$$F = \langle \partial_t\partial_s X, N \rangle = \frac{\langle w', -fw' + sw \wedge w' \rangle}{\sqrt{s^2 + f^2}\|w'\|} = \frac{-f\|w'\|}{\sqrt{s^2 + f^2}} \ ,$$

donc :

$$\det(M_{II}) = -\frac{f^2\|w'\|}{f^2 + s^2} \ .$$

Donc :

$$K = \frac{\det(M_{II})}{\det(M_I)} = -\frac{f^2}{(f^2 + s^2)^2} \ .$$

Définition Surfaces localement convexes.

Définition Une surface est **développable** si sa courbure est partout nulle.

Théorème Une surface réglée et localement convexe est développable.

Exemple Bords des enveloppes convexes, quand régulières !

NB Attention on passe dans la partie plus culturelle du cours – mais les détails de la preuve peuvent être faits par les étudiants motivés.

Théorème Soit $c : S^1 \to \mathbf{R}^3$ une courbe régulière. Supposons que c se trouve sur le bord de son enveloppe convexe, et que sa courbure ne s'annule nulle part. Alors il existe au moins 4 points où la torsion de c s'annule.

Preuve Repose sur l'étude du bord de l'enveloppe convexe de la courbe, mais demande un peu de travail... Pas très difficile.

Remarque C'est le "théorème des quatre sommets" pour les courbes "convexes" de $\mathbf{R}^3$. Démontré en 1994, [Sed94]. Mais la conjecture complète reste ouverte, car on a du supposer que la courbure ne s'annule nulle part.

Conjecture (Scherk, 1936) Une courbe fermée régulière convexe de $\mathbf{R}^3$ a au moins 4 points de torsion nulle.

4.2 Fonctions sur une surface

But Définir le hessien et le laplacien d'une fonction sur une surface, et applications. Connu au moins du cours de physique. Principe du maximum énoncé sans preuve. Utilisé dans la suite.

Définition Gradient d'une fonction sur S.

Définition Soit f une fonction sur une surface S. Soit X et Y deux champs de vecteurs sur S. On pose :

$$\mathrm{Hess}(f)(X, Y) := X.(Y.f) - (D_X Y).f \ .$$

Propriété On a aussi : $\text{Hess}(f)(X,Y) = I(D_X Df, Y) = I(X, D_Y Df)$.

Propriété En chaque point s de S, $\text{Hess}(f)$ définit une forme bilinéaire symétrique. CAD : ne dépend que de la valeur de X et de Y au point s, pas de leurs dérivées.

Preuve Pour la symétrie :

$$\text{Hess}(f)(X,Y) - \text{Hess}(f)(Y,X) = X.(Y.f) - (D_X Y).f - Y.(X.f) + (D_Y X).f =$$
$$= [X,Y].f - [X,Y].f = 0 \ .$$

Reste seulement à montrer que 0 si $X = 0$ en s, mais évident par la définition.

Définition On définit de même le hessien d'une fonction de $\mathbf{R}^3$ par :

$$\text{Hess}^0(f)(X,Y) := X.(Y.f) - (D^0_X Y).f \ .$$

C'est encore une forme bilinéaire symétrique en chaque point de $\mathbf{R}^3$.

Remarque Permet de définir la "dérivée seconde" d'une fonction. Mais ¸ca n'est pas possible sans une connexion ! Situation différente de la dérivée première, qui peut se définir sans métrique et sans connexion.

Théorème Soit f une fonction sur $\mathbf{R}^3$, et soit $\overline{f}$ sa restriction à une surface S. Alors, en un point de S, on a pour deux vecteurs X et Y tangents à S :

$$\text{Hess}(\overline{f})(X,Y) = \text{Hess}^0(f)(X,Y) + (N.f)II(X,Y) \ .$$

Laplacien Soit S une surface et $u : S \to \mathbf{R}$. On appelle Laplacien de u la fonction définie sur S par : $\Delta u := -\text{Tr}(\text{Hess}(u))$.

Remarque On peut faire de même en dimension 1, le Laplacien est simplement la dérivée seconde (au signe près).

Remarque Le signe est choisi pour que cet opérateur soit positif sur les fonctions ! Voir plus bas.

Fonctions harmoniques Soit S une surface, et $u : S \to \mathbf{R}$. On dit que u est harmonique si son laplacien est partout nul.

Exemple Sur $\mathbf{R}$, les fonctions harmoniques sont les fonctions affines.

Fonctions complexes [pour les fonctions réelles et complexes]

Théorème Soit S une surface, et $u : S \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors la partie réelle de u et la partie imaginaire de u sont toutes deux harmoniques.

Définition JX est le vecteur normal à X, de même norme, dans le sens trigonométrique.

Lemme $D_Y(JX) = JD_Y X$.

Preuve (du théorème) Soit X un champ de vecteurs unitaires. On a alors :

$$\begin{aligned}
-\Delta u &= X.du(X) + JX.du(JX) - du(D_X X) - du(D_{JX} JX) \\
&= -iX.du(JX) + iJX.du(X) + idu(JD_X X) - du(JD_{JX} X) \\
&= -iX.du(JX) + idu(D_X JX) + iJX.du(X) - idu(D_{JX} X) \\
&= -i\text{Hess}(u)(X, JX) + i\text{Hess}(u)(JX, X)
\end{aligned}$$

Remarque La réciproque est vraie aussi, montrée plus tard dans le cours.

Principe du maximum Une fonction harmonique ne peut pas avoir de maximum isolé.

Principe du maximum généralisé Soit f et g deux solutions d'une équation du type : $\mathrm{Tr}(\mathrm{Hess}(f)M(f,df)) + P(f,df) = 0$ sur un ouvert connexe Ω d'une surface, où $M(f,df)$ est une matrice 2×2 définie positive. Supposons que $f \geq g$ partout et $f(x_0)=g(x_0)$, et $d_{x_0}f = d_{x_0}g$. Alors $f=g$ partout.

Remarque Preuve possible dans bcp de cas si on suppose que f et g sont analytiques – en fait elles le sont souvent comme solutions de ces opérateurs.

Remarque l'hypothèse est équivalente au fait que f est solution d'une équation du type $\Delta f + P(f,df) = 0$, mais pour le laplacien d'une métrique autre que la métrique considérée sur S.

4.3 Déformations de surfaces

Déformations normales Il suffit de les considérer pour obtenir toutes les déformations infinitésimales de surfaces, au moins dans le cas complet. Données sous la forme fN. Revient à se donner une famille d'applications $\phi_t : S \to \mathbf{R}^3$, avec $\partial\phi_t/\partial t$ normal à $S_t := \phi_t(s)$.

Remarque Revient aussi à se donner une application $\Phi : S\times[-1,1] \to \mathbf{R}^3$, avec $\partial\Phi/\partial t = fN$. On peut donner explicitement Φ en utilisant l'application exponentielle normale à S.

NB Détermine une identification canonique entre la surface de départ et les surfaces déformées ; à tout champ de vecteurs sur S, on peut associer un champ de vecteur sur chaque S_t. On peut donc parler de variation première (dérivée) de I, II, B, da, etc.

cad Si X est un vecteur sur S, avec $X=\gamma'(0)$, on lui associe sur la courbe intégrale de N un champ de vecteurs donnés par $(\Phi\circ\gamma)'(0)$.

Remarque Attention, le vecteur normal unitaire N_t à S_t n'est pas le vecteur tangent unitaire à la courbe $\phi_t(x)$ pour x fixé, qu'on note encore N !

Lemme Soit X un champ de vecteurs sur S, étendu en un champ au voisinage de S. On a : $[X, fN] = 0$.

Preuve On se donne une paramétrisation locale de S, soit $v : U \to S$; on en déduit une application f d'un ouvert de $V \subset \mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$, donnée par $f(x,t) = \Phi(t, u(x))$. On appelle Y l'image inverse de X par f, alors Y est partout horizontale et indépendant de z dans $\mathbf{R}^3$; puis calcul explicite.

Variation première de I On a :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -2fII\ .$$

Preuve Pour X, Y deux champs de vecteurs sur S on a :

$$\begin{aligned}
\frac{dI(X,Y)}{dt} &= (fN).\langle X,Y\rangle\ ,\\
&= \langle D^0_{fN}X, Y\rangle + \langle X, D^0_{fN}Y\rangle\ ,\\
&= \langle D^0_X(fN), Y\rangle + \langle X, D^0_Y(fN)\rangle\\
&= -2fII(X,Y)\ .
\end{aligned}$$

Variation première de II On a :

$$\frac{\partial II}{\partial t} = \mathrm{Hess}^0(f) - fIII \ .$$

Preuve On montre d'abord que : $(D^0_{fN}N_t)_{|t_0} = Df$, où le gradient est pris sur S. On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{dII(X,Y)}{dt} &= (fN).\langle D^0_X Y, N_t\rangle \ , \\
&= \langle D^0_{fN} D^0_X Y, N\rangle + \langle D^0_X Y, D^0_{fN} N_t\rangle \ , \\
&= \langle R^0_{fN,X} Y + D^0_X D^0_{fN} Y + D_{[fN,X]} Y, N\rangle - \langle D^0_X Y, Df\rangle \\
&= \langle D^0_X D^0_Y fN, N\rangle - df(D_X Y) \\
&= \langle D^0_X(-fBY + df(Y)N), N\rangle - df(D_X Y) \\
&= -fII(X, BY) + X.df(Y) - df(D_X Y) \\
&= -fIII(X,Y) + \mathrm{Hess}(f)(X,Y) \ .
\end{aligned}$$

Variation première de l'aire La variation de l'aire est donnée par :

$$\frac{\partial da}{\partial t} = -2fH \ .$$

Traduction Variation de l'aire d'un domaine en terme d'intégration.

Surfaces minimales Une surface est dite **minimale** si sa courbure moyenne est partout nulle.

Explication Correspond aux surfaces dont l'aire ne varie pas au premier ordre quand on fait des déformations à support compact.

4.4 Surfaces minimales

Théorème Une surface est minimale si et seulement si, pour toute déformation à support compact, la variation de l'aire est nulle au premier ordre.

Interprétation physique Les surfaces minimales correspondent en particulier aux surfaces dont l'aire est minimale sous des contraintes données. Par exemple, les films de savon, qui minimisent leur tension superficielle.

Paramétrisation isothermes Une paramétrisation $X : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ d'une surface est **isotherme** si on a :

$$\|\partial_s X\| = \|\partial_t X\| \ , \quad \langle \partial_s X, \partial_t X\rangle = 0 \ .$$

Traduction On demande qu'il existe une fonction f sur Ω (non nulle) telle qu'on ait :

$$\langle dX(u), dX(v)\rangle = f^2 \langle u, v\rangle \ .$$

Propriété Soit X une paramétrisation isotherme d'une surface. Alors :

$$\partial_{ss} X + \partial_{tt} X = 2f^2 HN \ .$$

Preuve On dérive les équations caractérisant les paramétrisations isothermes :

$$\langle \partial_{ss}X, \partial_s X\rangle = \langle \partial_{st}X, \partial_t X\rangle \ ,$$

$$\langle \partial_{ts}X, \partial_t X\rangle + \langle \partial_s X, \partial_{tt}X\rangle = 0 \ .$$

Donc :

$$\langle \partial_{ss}X, \partial_s X\rangle + \langle \partial_{tt}X, \partial_s X\rangle = 0 \ ,$$

ce qui indique que $\partial_{ss}X + \partial_{tt}X$ est parallèle à N. Mais comme la paramétrisation est isotherme on a :

$$\langle \partial_{ss}X + \partial_{tt}X, N\rangle = 2f^2 H \ .$$

Théorème Soit S une surface. S est minimale ssi, pour toute paramétrisation isotherme, les fonctions coordonnées sont harmoniques.

Preuve Conséquence de la propriété précédente.

Théorème Une S surface est minimale ssi ses fonctions coordonnées sont harmoniques sur S.

Preuve Calcul explicite du Hessien, trace, et obtient $2HN$, donc 0 ssi $H = 0$.

CAD Le thm concernant les paramétrisations isothermes est moins géométrique, mais c'est ce qui sert dans la suite.

Représentation de Weierstrass Soit S une surface, et $X = (x, y, z)$ une paramétrisation de S. On note :

$$\phi_1 = \partial_s x - i\partial_t x, \ \phi_2 = \partial_s y - i\partial_t y, \ \phi_3 = \partial_s z - i\partial_t z \ .$$

Alors X est isotherme ssi $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$. De plus, si c'est le cas, S est minimale ssi les ϕ_i sont holomorphes.

Conséquence La recherche de surfaces minimale est ramenée à l'étude de fonctions holomorphes ! Cf les TD.

Lemme Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, et soit S le graphe de f. Alors la courbure moyenne de S est :

$$H = \frac{(1 + (\partial_y f)^2)\partial^2_{xx} f + (1 + (\partial_x f)^2)\partial^2_{yy} f - (1 + \partial_x f \partial_y f)\partial^2_{xy} f}{((1 + (\partial_x)^2)(1 + (\partial_y f)^2) - (\partial_x f)^2(\partial_y f)^2)\sqrt{1 + \|df\|^2}}.$$

Preuve On note $X := (1, 0, \partial_x f)$ et $Y := (0, 1, \partial_y f)$. Alors N est parallèle à $V = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1)$. On a :

$$II(X, X) = \frac{\langle D^0_X X, V\rangle}{\|V\|} \ ,$$

donc

$$II(X, X) = \frac{\partial^2 f/\partial x^2}{\sqrt{1 + \|df\|^2}} \ ,$$

et de même pour Y. De plus :

$$II(X, Y) = \frac{\partial^2 f/\partial x \partial y}{\sqrt{1 + \|df\|^2}} \ .$$

Par ailleurs, on a :

$$I(X, X) = 1 + (\partial f/\partial x)^2 \ , \quad I(Y, Y) = 1 + (\partial f/\partial y)^2 \ , \quad I(X, Y) = (\partial f/\partial x)(\partial f/\partial y) \ ,$$

et on en déduit H.

Principe du maximum Soit S_1 et S_2 deux surfaces minimales, et $x \in S_1 \cap S_2$. Supposons que S_1 reste, au voisinage de x, d'un seul coté de S_2. Alors S_1 et S_2 sont confondues au voisinage de x.

Preuve On prend un voisinage de x où S_1 et S_2 sont les graphes de fonctions f_1 et f_2 au-dessus du plan tangent à S_1 en x. Alors f_1 et f_2 sont harmoniques. On leur applique le principe du maximum pour conclure.

Théorème Il n'existe pas de surface minimale fermée. (ie : compacte sans bord !).

Propriété Soit g une courbe dans $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^3$. Soit S une surface à bord compacte, dont le bord est g. Si S est minimale, alors $S \subset \mathbf{R}^2$.

Théorème Soit g une courbe fermée de $\mathbf{R}^3$. Soit S une surface compacte minimale dont le bord est S. Alors S est contenue dans l'enveloppe convexe de g.

4.5 Surfaces à courbure moyenne constante

Définition Une surface à courbure moyenne constante est un surface telle que $H \equiv H_0$.

Remarque En particulier, les surfaces minimales sont CMC.

Interprétation physique Les bulles de savon sont des surfaces à courbure moyenne constante. En effet, la pression à l'intérieur de la bulle est supérieure à la pression à l'extérieur, ce qui est contrebalancé par la pression superficielle du film de savon.

Principe du maximum Soit S_1 et S_2 deux surfaces ayant la même courbure constante, et $x \in S_1 \cap S_2$ un point où les vecteurs normaux unitaires sont orientés du même coté. Supposons que S_1 reste, au voisinage de x, d'un seul coté de S_2. Alors S_1 et S_2 sont confondues au voisinage de x.

Preuve On prend un voisinage de x où S_1 et S_2 sont les graphes de fonctions f_1 et f_2 au-dessus du plan tangent à S_1 en x. Alors f_1 et f_2 sont solution de l'équation :

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$$

$$= H_0 \left(\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right) \sqrt{1 + \|df\|^2} \; .$$

On leur applique le principe du maximum pour conclure.

Réflexion d'Aleksandrov

Caractérisation de S^2 Soit S une surface fermée à courbure moyenne constante. Alors S est une sphère.

cad S est une "vraie" sphère ronde !!

Preuve Réflexions, on obtient un plan de symétrie pour chaque plan vectoriel. Ce plan passe nécessairement par le centre de gravité de la surface. Donc tous les plans passant par ce point sont des plans de symétrie. Donc S est symétrique sous le groupe engendré par ces symétries, qui n'est autre que le groupe des isométrie de $\mathbf{R}^3$ fixant ce point.

Chapitre 5

Le théorème de Gauss-Bonnet

5.1 Surfaces abstraites, variétés

Cartes Soit E un espace topologique ; une carte dans E est un couple (U, ϕ), où U est un ouvert de $\mathbf{R}^2$, et $\phi : U \to E$ est un homéomorphisme.

CAD Fournit un système de coordonnées dans un morceau de E.

Atlas Un atlas est une famille (U_i, ϕ_i) de cartes tel que :

1. les $\phi_i(U_i)$ recouvrent E ;
2. si $\phi(U_i) \cap \phi_j(U_j) \neq \emptyset$, et si $W := \phi_i^{-1}(\phi(U_i) \cap \phi_j(U_j))$, alors $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ est régulière sur W.

Définition Une surface est un espace topologique **séparé** muni d'un atlas. Une surface orientable est obtenue si on demande que les $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ préservent l'orientation.

NB Dans la suite on utilisera seulement des surfaces orientables.

Exemple Bande de Möbius. Non orientable.

Exemple Pour séparé : deux copies de $\mathbf{R}^2$ collées en 0.

Définition Deux surfaces sont équivalentes si leurs atlas sont compatibles, c'est à dire si...

Variétés Même chose en dim plus grande.

Lemme Les surfaces de $\mathbf{R}^3$ sont des surfaces (abstraites).

Définition Applications régulières.

Définition Champs de vecteurs. Espace tangent.

Définition Difféomorphismes.

Définition Métriques riemanniennes.

Exemple Surfaces dans $\mathbf{R}^3$ et leurs métriques induites.

Lemme Toute surface compacte admet une métrique riemannienne.

Preuve Repose sur les partitions de l'unité, etc. Admis ici.

Remarque Certaines métriques riemanniennes ne sont pas obtenues dans $\mathbf{R}^3$! Par exemple la métrique plate sur le tore T^2, à cause du :

Théorème de Hadamard : toute surface fermée dans $\mathbf{R}^3$ a une courbure qui est strictement positive en un point.

5.2 Gauss-Bonnet pour les surfaces dans $\mathbf{R}^3$

Théorème Soit S une surface fermée dans $\mathbf{R}^3$. Alors l'intégrale de la courbure de S est égale à un multiple entier de 4π. Cet entier est le degré de l'application de Gauss.

Définition Un point critique d'une application d'une surface dans une autre est un point où la différentielle n'est pas injective.

Définition Une valeur critique d'une application est l'image d'un point critique.

Lemme de Sard : pour toute application régulière d'une surface fermée dans une autre, l'ensemble des valeurs critiques est de mesure nulle.

Preuve Admis ici, mais pas très difficile — on se ramène à une question locale pour les applications d'un ouvert de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$.

Degré des applications

NB (admis) Soit $f : S \to S'$ une application régulière entre surface orientables . Il existe des valeurs régulières de f, car le complémentaire est de mesure nulle.

Lemme Soit $f : S \to S'$ une application régulière. Il existe un entier $k \in \mathbf{Z}$ tel que :

1. pour toute 2-forme w sur S', on a :
$$\int_S f^* w = k \int_{S'} w \ ;$$
2. pour toute valeur régulière y de f, on a :
$$\sum_{f(x)=y} \operatorname{sign}(\operatorname{Jac}(d_x f)) = k \ .$$

Preuve exercice ! Découper la surface en morceaux, etc.

Définition On appelle k le degré de f.

Remarque Si f n'est pas surjective, son degré est nul.

Remarque Rapport avec le degré des applications en dim 1 : cas particulier.

Preuve du théorème de Gaus-Bonnet : On fait un changement de variables et on se ramène à une intégration sur la sphère (exercice).

5.3 Triangulations

Définition Triangulations

Définition Triangulations plus fines.

Définition Triangulations homotopes.

Lemme **(Admis)** Soit S une surface, et soit T et T' deux triangulations de S. Il existe une triangulation T'' homotope à T et une triangulation $\overline{T}$ plus fine que T' et que T''.

Exemple Triangulations de S^2. Du tore. Calculs de caractéristique d'Euler...

Définition Caractéristique d'Euler d'une triangulation.

Remarque Pas nécessaire que ce soit une triangulation ! Exemples des polyèdres réguliers.

Lemme si T' est plus fine que T, alors $\chi(T') = \chi(T)$.

Corollaire Soit S une surface ; toutes les triangulations de S ont même caractéristique d'Euler.

Exemple 2 pour S^2, 0 pour T^2, puis tores à 2 trous, 3 trous, etc.

5.4 Formes différentielles

Définition 1-formes, Ω^1.

Exemple Différentielle d'une fonction.

Définition Intégration d'une 1-forme sur une courbe.

Rappel Formes antisymétriques dans $\mathbf{R}^2$. Forment un EV de dim 1.

Définition 2-formes dans S. $\Omega^2(S)$.

Définition Aire associée à une 2-forme. Intégration sur un ouvert à bord.

Lemme Indépendant du paramétrage choisi.

Définition 2-forme canonique associée à une métrique riemannienne.

Lemme Correspond à la notion d'aire introduite avant !

Définition df, du.

Définition $u \wedge v$ pour u, v des 1-formes.

Propriété $d(fu) = df \wedge u + fdu$.

Lemme Invariant par difféomorphisme.

Propriété Soit u une 1-forme sur un triangle Ω de $\mathbf{R}^2$. Alors :

$$\int_\Omega du = \int_{\partial\Omega} v \ .$$

Preuve Explicite : $u = adx + bdy$, puis on applique une intégration à chaque terme.

Formule de Stokes Soit $\Omega \subset S$ un ouvert relativement compact, à bord régulier par morceaux. Alors, pour toute 1-forme u sur S :

$$\int_\Omega du = \int_{\partial\Omega} v \ .$$

Preuve Par décomposition en éléments triangulaires. Puis utilisation de l'invariance par difféomorphismes et passage dans $\mathbf{R}^2$ pour un triangle.

Définition 1-forme fermées.

Exemple La différentielle d'une fonction est fermée.

Définition Formes exactes.

Lemme de Poincaré Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbf{R}^2$. Pour toute 1-forme u à support dans Ω avec $du = 0$, il existe une fonction f sur $\mathbf{R}$ telle que $u = df$. Pour toute 2-forme w sur Ω, il existe une 1-forme u telle que $w = du$.

5.5 Gauss-Bonnet polygonal

Lemme Soit S une surface, et soit $\Omega \subset S$ un ouvert relativement compact de S à bord régulier, difféomorphe à un disque. Alors :

$$\int_\Omega Kda = 2\pi - \int_{\partial\Omega} kds \ .$$

Preuve Il suffit de le faire pour les disques de $\mathbf{R}^2$ munis d'une métrique. On choisit un champs de vecteurs unitaire v, avec une singularité. On considère la 1-forme associée à la connexion, soit :

$$u(x) = g(D_x v, Jv) \ .$$

On remarque que $du = Kda$. En effet :

$$du(v, Jv) = v.g(D_{Jv}v, Jv) - Jv.g(D_v v, Jv) - g(D_[v, Jv]v, Jv) \ ,$$

donc :

$$du(v, Jv) = g(D_v D_{Jv} v, Jv) - g(D_{Jv} D_v v, Jv) - g(D_[v, Jv]v, Jv) \ ,$$

donc

$$du(v, Jv) = K \ .$$

Théorème Soit S une surface, et soit Ω un ouvert relativement compact de S, à bord régulier par morceaux, homéomorphe au disque. Alors :

$$\int_\Omega Kda = 2\pi - \int_{\partial\Omega} kds + \sum_i \alpha_i \ ,$$

où les α_i sont les angles (extérieurs) aux points singuliers du bord.

Preuve Approximation par des réguliers.

5.6 Gauss-Bonnet intrinsèque

Théorème Soit S une surface (intrinsèque). L'intégrale de la courbure de S est égale à $4\pi\chi(S)$.

Corollaire Si f est une surface dans $\mathbf{R}^3$, alors le degré de son application de Gauss est égale à sa caractéristique d'Euler.

Preuve On choisit une triangulation, et on applique le théorème précédent. On remarque que les angles intérieurs sont π moins les angles extérieurs, et que la somme des angles intérieurs est 2π pour chaque sommet.

Chapitre 6

Géométrie intrinsèque des surfaces

6.1 Coordonnées

Remarque Soit S une surface, munie localement d'une carte. On a alors un système de coordonnées locales, qu'on note (x^i). On peut note aussi :

$$e_i := \frac{\partial}{\partial x^i} ,$$

les (e_i) forment alors une base de chaque espace tangent. Chaque champ de vecteurs peut donc s'écrire sous la forme :

$$v = \sum_i v^i e_i ,$$

si bien que v est uniquement déterminé par les fonctions v^i. La métrique riemannienne g est alors déterminée en chaque point par une matrice (g_{ij}), avec :

$$g(v, w) = \sum_{i,j} g_{ij} v^i w^j .$$

Remarque Notation de sommation implicite sur les indices et exposants.

Définition On note (g^{ij}) la matrice inverse de (g_{ij}).

Lemme On a :

$$[v, w]^i = v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} - v^i \frac{\partial w^j}{\partial x^j} .$$

Preuve Par dérivation des fonctions.

Théorème La connexion D de g est définie par la formule :

$$(D_v w)^i = v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} v^j w^k ,$$

où :

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{kl} - \partial_l g_{jk}) .$$

Corollaire $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

Preuve [Attention à avoir des exposants k pour les termes en u pour pouvoir simplifier]

$$2g(D_v w, u) = v.g(w,u) + w.g(v,u) - u.g(v,w) + g([v,w],u) - g([w,u],v) + g([u,v],w) \ ,$$

donc :

$$2g_{ij}(D_v w)^i w^j = v^i \partial_i (g_{jk} w^j u^k) + w^j \partial_j (g_{ik} v^i u^k) - u^k \partial_k (g_{ij} v^j w^i) + \\ + g_{ik}(v^j \partial_j w^i - w^j \partial_j v^i) u^k - g_{ij}(w^k \partial_k u^j - u^k \partial_k w^j) v^i + g_{ij}(u^k \partial_k v^i - v^k \partial_k u^i) w^j \ .$$

Puis regrouper les termes contenant des dérivées de u, ensuite des dérivées de v et w, enfin les termes résiduels.

Théorème Soit $(x, v) \in TS$; il existe une unique géodésique issue de x, paramétrée à vitesse constante, et dont la vitesse en 0 est v.

NB à priori c'est seulement un "germe" de géodésique, de longueur arbitrairement petit.

Preuve Théorème de Cauchy-Lipschitz pour le champ de vecteur défini sur TS, dans le voisinage de $s \in S$, par les équations satisfaites par les géodésiques.

6.2 Champs de Jacobi

Définition Soit $c : [0, L] \to S$ un segment géodésique. Un champ de Jacobi Y le long de c est un champ de vecteur le long de c tel qu'il existe une famille à un paramètre de géodésiques, $(c_t)_{t\in[0,1]}$ tel que $c_0 = c$, que tous les c_t soient des segments géodésiques (paramétrés à vitesse constante) et que $Y = \partial c_t(s)/\partial t$.

Lemme Soit Y un champ de vecteurs le long d'une géodésique c. Alors Y est un champ de Jacobi ssi la longueur orientée de sa partie tangentielle est affine, et si la longueur orientée y de sa partie normale est solution de :

$$y''(s) + K(c(s))y(s) = 0 \ .$$

Preuve On calcule l'edo satisfaite par les composantes tangentielle et orthogonale de Y ; pour ça on note $X = c'$, on a alors $[X, Y] = 0$, donc :

$$D_X D_X Y = D_X D_Y X = R_{X,Y} X + D_Y D_X X + D_[X, Y]X \ ,$$

donc

$$D_X D_X Y = R_{X,Y} X \ ,$$

et le résultat suit par décomposition en partie tangentielle et orthogonale.

Coordonnées géodésiques Soit $s \in S$. Les coordonnées géodésiques sont les coordonnées (r, θ) obtenues en prenant l'image par l'application exponentielle en s de coordonnées polaires dans $T_s S$.

Lemme Dans les coordonnées géodésiques on a :

$$g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = 0 \ .$$

Preuve Propriétés des champs de Jacobi (partie tangentielle).

Théorème Soit $s \in S$. Il existe un voisinage U de s tel que, pour tout $x \in U$, il existe un unique chemin minimisant entre s et x, et c'est un segment géodésique.

Définition Soit $c : [0, L] \to S$ un segment géodésique, avec $c(0) = p$. Un point $c(t_1)$ est conjugué à p le long de c si $\exp_p$ n'est pas inversible en $t_1 c'(0)$.

CAD Signifie que si on déplace un peu $c'(0)$, on tombe quand même (au premier ordre) sur le même point $c(t_1)$.

Exemple Sur S^2, un point n'est conjugué qu'avec le point antipodal, et ce quel que soit la géodésique considérée.

Remarque q est conjugué à p le long de c ssi il existe un champ de Jacobi le long de c qui s'annule en p et en q.

Exemple Champs de Jacobi le long de géodésiques de S^2.

Exemple Champs de Jacobi le long des géodésiques de $\mathbf{R}^2$.

Théorème Soit $c : [0, l] \to S$ un segment géodésique paramétré à vitesse unité. Soit Y un champ de vecteurs orthogonal sur c qui s'annule aux extrémités de c, avec $Y = yJc'$, et soit (c_t) une déformation de c telle que :

$$(\partial_t c_t)_{|t=0} = Y \ .$$

Alors la variation seconde de la longueur de (c_t) est donnée par :

$$L''_{t=0} = -\int_0^l y(y'' + K_0 y)ds \ .$$

Remarque Intéressant que ça ne dépende que de y !

Preuve On pose $X = c'_t$, on a alors :

$$L' = \int_0^l \frac{\langle \partial_t c'_t, c'_t \rangle}{\|c'_t\|^2} ds \ ,$$

donc :

$$\begin{aligned} L'' &= \int_0^l \partial_t \frac{\langle \partial_t c'_t, c'_t \rangle}{\|c'_t\|^2} ds \\ &= \int_0^l \frac{(\langle \partial_t^2 c'_t, c'_t \rangle + \langle \partial_t c'_t, \partial_t c'_t \rangle)\|c'_t\|^2 - 2\langle \partial_t c'_t, c'_t \rangle^2}{\|c'_t\|^2} ds \ . \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} L''_{|t=0} &= \int_0^l \langle \partial_t^2 c'_t, c'_t \rangle + \langle \partial_t c'_t, \partial_t c'_t \rangle - 2\langle \partial_t c'_t, c'_t \rangle^2 \\ &= \int_0^l \langle D_Y D_Y X, X \rangle + \langle D_Y X, D_Y X \rangle - 2\langle D_Y X, X \rangle^2 \\ &= \int_0^l \langle D_Y D_X Y, X \rangle + \langle D_X Y, D_X Y \rangle \\ &= \int_0^l \langle D_X D_Y Y + R_{Y,X} Y + D_{[Y,X]} Y, X \rangle - \langle D_X D_X Y, Y \rangle + [\langle D_X Y, Y \rangle]_0^l \\ &= \int_0^l X.\langle D_Y Y, X \rangle - \langle D_Y Y, D_X X \rangle - K_0 y^2 - y y'' ds \ . \end{aligned}$$

Théorème Soit c un segment géodésique. S'il existe deux points p et q conjugués le long de c (qui ne sont pas tous deux des extrémités de c), alors c n'est pas minimisante.

Preuve Par la variation seconde de la longueur, qu'on applique en alongeant un peu l'intervalle entre les points conjugués et en utilisant une solution de $y'' + K_0 y = \epsilon$, pour ϵ assez petit.

6.3 Géodésiques

Définition Applications exp et Exp.

Théorème Pour tout $s \in S$, $\exp_s$ est un difféomorphisme local en 0.

Exemple $\mathbf{R}^2$, S^2.

Théorème Pour tout $s \in S$, il existe un voisinage U de s tel que tout point de U est joint à s par un unique courbe minimisante, qui est une géodésique.

Définition On dit qu'une surface (S, g) est géodésiquement complète si tout segment de géodésique peut être prolongé pour tous temps.

Théorème Soit (S, g) une surface riemannienne complète ; alors (S, g) est géodésiquement complète.

Théorème Soit S une surface, munie d'une métrique riemannienne complète. Soit $p, q \in S$. Alors il existe une géodésique joignant p à q, et dont la longueur est $d(p, q)$.

Heuristique minimisation de longueur de courbe. Mais pas facile à mettre en forme de cette manière.

Exemple Sur $S^2 \setminus \{p_+\}$, il existe des paires de points qui ne sont pas joints par une géodésique minimisante (mais toute paire de point est jointe par une géodésique). Sur $S^2 \setminus \{p_+, p_-\}$, il existe des paires de points qui ne sont pas joints par des géodésiques.

Preuve On construit un cercle C_ϵ de rayon ϵ autour de p, et on note qu'il existe un point r de ce cercle tel que $d(p, q) = d(p, r) + d(r, q)$ (par compacité de C_ϵ).

Si ϵ est assez petit, il est l'image d'un cercle (un vrai) dans T_pS. En particulier r est l'image d'un vecteur de la forme ϵv. On considère la géodésique c issue de p avec $c'(0) = v$. Ainsi $c(\epsilon) = r$. Pour tout
Fin 9/01/01 $t \in [0, \epsilon]$, $d(p, q) = d(p, c(t)) + d(c(t), q)$.

On appelle t_0 le sup des t' tels que ça reste le cas. Alors la propriété reste valide en t_0 par continuité, et au-dessus de t_0 : par argument de cercle à nouveau, choix d'un nouveau point d'un petit cercle de centre $c(t_0)$ comme avant, et remarque que pas de changement de direction possible.

6.4 Surfaces à courbure positive

Théorème de Bonnet Soit S une surface complète, à courbure $K \geq K_0 > 0$. Alors S est compacte, et son diamètre est borné par $\pi/\sqrt{K_0}$, et son aire est bornée par π^3/K_0. De plus, $\pi_1(S)$ est fini.

Preuve La borne sur le diamètre découle des ptés des champs de Jacobi, et du théorème de comparaison de Sturm. Puis en déduire aire. Pour le π_1 passer à revêtements, et utiliser que l'aire est finie pour en déduire une borne sur le nombre d'éléments.

Thm de Sturm Soit u et v deux solutions de :

$$u'' + A(s)u = 0 \ ,$$

$$v'' + B(s)v = 0 \ ,$$

avec $A(s) \geq B(s)$, et $u(0) = v(0) = 0$. Si u_0 et v_0 sont les premiers zéros de u et v resp., alors $u_0 \leq v_0$.

NB Extension en dimension plus grande.

6.5 Surfaces à courbure négative

Théorème de Hadamard Soit S une surface simplement connexe, complète, à coubure $K \leq 0$. Alors S est simplement connexe, et, entre deux points passent un unique géodésique, qui est minimisante.

Preuve Soit $s \in S$. $\exp_s$ n'a pas de point critique, car il n'y a pas de point conjugués. On note r_0 le sup des rayons tels que $\exp_s$ est un difféo sur les disques de rayon r. On note que pour r_0 on a soit un point conjugué, soit un segment géodésique fermé basé en s. Le premier cas est exclu par les champs de Jacobi, le second par Gauss-Bonnet. Donc $\exp_s$ est un difféomorphisme.

Théorème (admis) Soit (S, g) une surface compacte. Pour tout élément $\gamma\pi_1 S$, il existe une géodésique fermée g telle que $[g] = \gamma$.

Idée de démonstration Minimiser la longueur des courbes dans γ... Mais difficultés, donc le faire parmi les courbes géodésiques par morceaux

Théorème (admis) Soit (S, g) une surface compacte à courbure négative. Pour tout élément $\gamma\pi_1 S$, il existe une unique géodésique fermée g telle que $[g] = \gamma$.

Bibliographie

[BG93] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.* Presses universitaires de France, 1993.

[dC76] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.

[GHL87] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian Geometry.* Springer, 1987.

[Sed94] V.D. Sedykh. Four vertices of a convex space curve. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 26 :177–180, 1994.