Cours de maîtrise de math, MMB B2
Petit rappel de calcul différentiel

22 Novembre 2003

Différentielle des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un point, et soit $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. On pose :

$$d_x f(v) := \left(\frac{d}{dt} f(x+tv)\right)_{t=0} .$$

Ceci définit une application *linéaire* de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ — la linéarité étant par rapport à v — qu'on appelle la différentielle de f en x.

Action des champs de vecteurs sur les fonctions. Considérons maintenant un champ vecteurs v sur $\mathbb{R}^n$, c'est à dire la donnée, en chaque point $x \in \mathbb{R}$, d'un vecteur v_x. On définit l'action par dérivation de v sur la fonction f de la manière suivante. $v.f$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$(v.f)(x) := d_x f(v_x) .$$

Extension aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Si maintenant $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, soit $F = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$, et si $x \in \mathbb{R}^n$ est un point et $v \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur, on définit :

$$d_x F(v) := (d_x f_1(v), d_x f_2(v), \cdots, d_x f_p(v)) .$$

De même, on note :

$$(v.F)(x) := d_x F(v) .$$

Formule de dérivation de la composée de deux fonctions. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, et soit $G : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, on a en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$:

$$d_x(G \circ F)(v) = (d_{F(x)} G) \circ (d_x F)(v) .$$

Exemples d'application. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^p$ une courbe paramétrée, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $G : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction régulière. On a d'après la formule précédente :

$$\frac{d}{dt}(G(\gamma(t))) = (d_{\gamma(t)} G)(\gamma'(t)) .$$

Différentielle d'une fonction définie sur une surface. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface, et soit $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x \in S$, et soit $v \in T_x S$. On peut étendre f en une fonction $\overline{f}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, avec $\overline{f}_{|S} = f$. On remarque que $(d_x \overline{f})(v)$ ne dépend pas de l'extension $\overline{f}$ choisie, et on définit donc $d_x f(v) := d_x \overline{f}(v)$. On peut étendre cette définition au cas où f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Hessien d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soit encore $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et soit $x \in \mathbb{R}^n$. Le *hessien* de f en x est la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$. Si $v, w \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs, on pose :

$$\mathrm{hess}_x(v,w) := (v.(w.f))(x) = d_x((d_x f)(w))(v) \ .$$

Dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, la matrice de $\mathrm{hess}_x(f)$ est la matrice des dérivées secondes de f en x.

Difféomorphisme d'une surface dans une autre. Soit $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ deux surfaces, et soit $F : S \to S'$ une fonction régulière. On peut considérer F comme une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, et donc sa différentielle $d_x F$ en un point $x \in S$. C'est une application linéaire de $T_x S$ dans $T_{F(x)} S'$.

Image d'une métrique par une application. On considère maintenant une métrique g sur S', c'est à dire la donnée, pour chaque point $y \in S'$, d'un produit scalaire sur $T_y S'$ (avec une propriété de régularité par rapport à y). On peut définir la forme bilinéaire "tirée" de g sur TS par f :

$$\forall x \in S, \forall v, w \in T_x S, (f^* g)(v,w) = g(d_x f(v), d_x f(w)) \ .$$

Si f est un difféomorphisme local — c'est à dire si sa différentielle est inversible en tout point — alors $f^* g$ est une métrique sur S.