Géométrie hyperbolique
Cours de D.E.A., 2003-04

Jean-Marc Schlenker[1]

Oct. 2003 (v0)

[1]Laboratoire Emile Picard, UMR CNRS 5580, UFR MIG, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, France. `schlenker@picard.ups-tlse.fr`; `http://picard.ups-tlse.fr/~schlenker`.

Contents

Introduction

La géométrie hyperbolique dans l'histoire

Une motivation : l'axiome des parallèles Dans ses "Eléments", Euclide utilise un axiome qui peut se formuler sous différentes formes, par exemple :

> La somme des angles d'un triangle est égale à π.

Dès la renaissance, la question se pose de savoir si cet axiome est vraiment nécessaire.

La découverte de la géométrie hyperbolique Par Bolyai et Lobatchevsky, indépendamment, un peu avant 1850. Elle vérifie tous les axiomes d'Euclide, sauf l'axiome des parallèles : la somme des angles d'un triangle est inférieure à π.

Quelques aspects de la géométrie hyperbolique Dès sa découverte, des mathématiciens développent certains aspects riches et subtils de la géométrie hyperbolique, par exemple la théorie des polyèdres (Schläfli, etc).

Qu'est-ce que le plan hyperbolique ? C'est une surface difféomorphe au plan (ou a un disque), munie d'une *métrique*, c'est à dire d'une manière de mesurer la longueur des courbes. Il y a des *droites* — qui minimisent la distance entre leurs points. Mais la géométrie est plus riche que dans le plan euclidien. On a un *bord à l'infini*, équivalent à la droite projective réelle, et d'autres structures (par exemple les *horocycles*).

Les variétés hyperboliques

Les surfaces Ce sont des variétés de dimension 2, pour lesquelles chaque point "ressemble localement à $\mathbf{R}^2$".

Les surfaces hyperboliques Ce sont des surfaces munies d'une métrique — une manière de mesurer la longueur des courbes — qui est localement isométrique au plan hyperbolique. On peut comprendre à quoi ressemble l'ensemble des surfaces hyperboliques, c'est la *théorie de Teichmüller*.

Liens avec les surfaces de Riemann Ce sont des surfaces, munies d'une structure complexe. A chaque surface de Riemann, on associe uniquement une surface hyperbolique, et réciproquement.

Liens avec la théorie des nombres Les *forme modulaires*, qui "vivent" sur des surfaces hyperboliques, jouent un rôle fondamental dans la théorie des nombres, c.f. la preuve du théorème de Fermat par Wiles.

Le théorème d'uniformisation de Poincaré Les surfaces fermées (compactes sans bord) sont classifiées à déformation près. Quand elles sont orientables, elles sont classifiées par leur "genre". Poincaré a montré que chaque surface admet une métrique localement sphérique (pour la sphère), euclidienne (pour le tore) ou hyperbolique (pour toutes les autres). Il n'y a pas unicité, pour les métriques hyperboliques.

Les variétés hyperboliques de dimension 3 Elles sont beaucoup plus délicates à comprendre que les surfaces hyperboliques. On donnera deux méthodes pour construire de telles variétés, et des conditions sous lesquelles une variété de dimension 3 ne peut pas admettre de métrique hyperbolique.

La conjecture de géométrisation de Thurston

Géométrie hyperbolique et cosmologie L'univers est-il une variété hyperbolique, plate ou sphérique ? C'est une question que les cosmologues se posent très sérieusement...

La géométrie des groupes

Une idée forte des maths contemporaines : appliquer des notions issues de la géométrie hyperbolique pour l'étude des groupes discrets.

En particulier, une variété hyperbolique est "proche" (en un sens précis) de son groupe fondamental.

Chapter 1

Géométrie du plan hyperbolique

Motivations

Objectifs du chapitre :

1. Comprendre la définition du plan hyperbolique.
2. Maîtriser les différents modèles qui permettent de le comprendre heuristiquement.
3. Maîtriser ses propriétés élémentaires, par exemple la géométrie des triangles hyperboliques.
4. Notion de bord à l'infini, d'horocycle, de fonction de Busemann.

1.1 La géométrie de la sphère

Définition $S^2 \subset \mathbf{R}^3$.

Notion de métrique Forme bilinéaire symétrique définie positive sur les espaces tangents. Permet de définir la longueur d'une courbe. On peut la noter $I(x, y)$, ou bien $\langle x, y \rangle$.

Définition Distance associée : par l'inf des longueurs des courbes reliant deux points.

Groupe des isométries C'est un point crucial : S^2 est *homogène et isotrope*, c'est à dire que :

- "chaque point ressemble à chaque autre" (leurs voisinages).
- si on se place en un point et qu'on "regarde" dans deux directions différentes, on "voit" la même chose.

Définition On note $O(3)$ le groupe de Lie des transformations linéaires de $\mathbf{R}^3$ qui préservent la métrique. On note $SO(3)$ le sous-groupe des éléments de déterminant 1.

Propriété $O(3)$ agit de manière *transitive* sur les vecteurs unitaires de S^2. De même pour $SO(3)$.

Preuve Par action de $O(3)$ sur les bases orthonormées de $\mathbf{R}^3$.

La connexion naturelle On considère une surface S avec son fibré tangent TS.

Définition Une *connexion* est un opérateur D qui à deux sections de TS, soit x, y, en associe une troisième, $D_x y$, telle que :

- $D_x y$ est une application linéaire en x.
- $D_x(y+z) = D_x y + D_x z$, mais $D_x(fy) = df(x)y + fD_x y$.

Exemple On note ∇^0 la connexion plate de $\mathbf{R}^3$.

Proposition Soit (S, g) une surface munie d'une métrique riemannienne. Il existe une unique connexion ∇ sur TS, la *connexion de Levi-Cività* de (S, g), telle que :

- ∇ est *sans torsion* : $\nabla_x y - \nabla_y x = [x, y]$, où $[,]$ est le crochet de Lie sur S.
- ∇ est *compatible* avec g : $x.g(y, z) = g(\nabla_x y, z) + g(y, \nabla_x z)$.

Preuve Si ∇ vérifie ces propriétés, on doit avoir :

$$2g(\nabla_x y, z) = x.g(y, z) + y.g(x, z) - z.g(x, y) + g([x, y], z) - g([x, z], y) - g([y, z], x) \ .$$

Cette relation détermine uniquement la connexion ∇. Réciproquement, il faut montrer que cette relation définit bien une connexion, et qu'elle est sans torsion et compatible (exercice).

Exercice Montrer que ∇^0 est la connexion de Levi-Civita de $\mathbf{R}^3$.

Propriété La connexion de Levi-Cività de S^2 est définie par projection de ∇^0 sur S^2 : $\nabla_x y = \Pi(\nabla^0_x y)$.

Fin du cours no 1

Interprétation de la connexion C'est une manière de comparer les vecteurs en deux points différents. Mais la comparaison dépend du chemin choisi ! Ex. pour un petit tour qui revient à son point de départ. D'où la notion de courbure.

Courbure C'est une notion fondamentale en géométrie riemannienne, qui prend une forme plus simple en géométrie sphérique ou hyperbolique.

Définition-propriété

1. Soit x, y, z des champs de vecteurs sur S^2. En un point m, la valeur du champs :
$$R_{x,y}z := \nabla_x(\nabla_y z) - \nabla_y(\nabla_x z) - \nabla_{[x,y]}z$$
ne dépend que de la valeur de x, y, z en m.
2. L'expression $\langle R_{x,y}z, t\rangle$ est antisymétrique en x, y et en z, t, et symétrique par rapport à $(x, y), (z, t)$.
3. Si x, y est un repère orthonormé, alors $\langle R_{x,y}y, x\rangle = 1$.

Remarque Les points (1) et (2) sont vrais pour toute métrique riemannienne sur une variété. R est le *tenseur de courbure de Riemann*. Le point (3) est spécifique à la sphère, on dit que c'est une surface à courbure constante 1.

Preuve On remarque que si on définit R pour ∇^0 au lieu de ∇, on trouve 0. On sait aussi que, si x et y sont tangents :

$$\nabla^0_x y = \nabla_x y + II(x,y)N \ ,$$

où II est la seconde forme fondamentale de S^2, ici $II = I$, symétrique, et que :

$$\nabla^0_x N = -x \ .$$

On en déduit le résultat par un calcul direct.

Géodésiques Ce sont les généralisation de la notion de droite.

Définition Soit Soit $\gamma : I \to S^2$ une application régulière. Sa connexion géodésique est définie par :

$$\langle \frac{1}{\|\gamma'(s)\|} \langle \nabla_{\gamma'(s)} \gamma'(s), N \rangle \ ,$$

où N est la normale unitaire orientée de γ.

Propriété C'est indépendant de la paramétrisation !

Définition γ est une géodésique si et seulement si sa connexion géodésique est nulle.

Proposition Soit $x \in S^2$ et soit $v \in T_x S^2$. Il existe une unique géodésique $\gamma : \mathbf{R}_+ \to S^2$, paramétrée à vitesse constante, avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

Preuve Par l'application du théorème de Cauchy-Lipschitz au fibré tangent de S^2.

Propriété Soit $x \in \gamma$, il existe un voisinage U de x dans γ tel que, pour tout $y \in U$, le segment de γ entre x et y réalise la distance entre x et y.

Preuve Admis ici.

Proposition Les géodésiques de S^2 sont les intersections avec S^2 des plans contenant 0.

Preuve Par symétrie pour la courbure géodésique.

Propriété

- Toutes les géodésiques sont de longueur 2π.
- Deux géodésiques distinctes se rencontrent toujours en deux points antipodaux.

1.2 Le plan hyperbolique comme quadrique

L'espace de Minkowski C'est un espace qui joue un rôle fondamental dans la relativité restreinte.

Définition R^3_1 est $\mathbf{R}^3$ muni de la métrique :

$$\langle x, y \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 \ .$$

Définition Une droite est de type espace, lumière ou temps, etc.

Définition De même pour les 2-plans et pour les hyperplans.

Définition On note $O(2,1)$ le groupe de Lie des transformations linéaires de $\mathbf{R}^3$ qui préservent la métrique de $\mathbf{R}^3_1$, et $SO(2,1)$ le sous-groupe de ceux qui sont de déterminant 1. On note $O_+(2,1)$ le sous-groupe de $O(2,1)$ le sous-groupe des éléments u tels que :

$$\langle u(e_0), e_0 \rangle > 1 \ .$$

On note $SO_+(2,1) = O_+(2,1) \cap SO(2,1)$.

Propriété Les éléments de $O(2,1)$ sont les applications linéaires dont les colonnes des matrices forment des bases orthonormées pour $\langle , \rangle$.

Remarque Les symétries orthogonales par rapport aux plans de type temps sont dans $O_+(2,1)$.

Définition du plan hyperbolique

Définition On note :

$$H^2 := \{x \in \mathbf{R}^3_1 \mid x_0 > 0 \wedge \langle x, x \rangle = -1\} \ ,$$

muni de la métrique induite, qui est riemannienne.

Propriété H^2 est invariant sous l'action de $O_+(2,1)$, qui agit par isométries . $SO_+(2,1)$ agit transitivement sur le fibré unitaire de H^2.

Connexion Comme dans le cas de la sphère.

Courbure Similaire au cas de la sphère, mais on a maintenant, si x, y forment une base orthonormée :

$$\langle R_{x,y} y, x \rangle = -1 \ .$$

On dit que H^2 est à courbure constante -1.

Géodésiques Définition par la courbure géodésique.

Propriété Les géodésiques de H^2 sont les intersections avec H^2 des plans vectoriels de type temps de $\mathbf{R}^3_1$.

1.3 Le modele projectif

Objectif Essayer de comprendre le plan hyperbolique en le "représentant" comme un domaine de $\mathbf{R}^2$, en préservant certaines de ses propriétés.

Définition Par projection sur $x_0 = 1$ dans la direction de 0.

Propriété L'image est la boule de rayon 1, B^2. Les géodésiques de H^2 sont envoyés sur les segments de B^2.

Preuve Ce sont les intersections avec les plans vectoriels de type temps.

Propriété Les points à distance ρ de $(1,0,0)$ sont envoyés sur les points à distance $\tanh(\rho)$ de 0.

Propriété Soit $x, y \in H^2$, soit ρ la distance hyperbolique entre eux. Alors $\langle x, y\rangle = \cosh(\rho)$.

Preuve Il suffit de prendre $x = 0$ grâce à l'action de $SO(2,1)$.

Propriété Dans le modèle projectif, la métrique du plan hyperbolique s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{1-r^2}h_r + \frac{1}{(1-r^2)^2}dr^2 \ ,$$

où h_r est la métrique de la sphère de rayon r.

Preuve Par coefficient de projection latérale égal à $\cosh(\rho)$ par le modèle projectif, et égal à $1/\tanh'(\rho) = \cosh^2(\rho)$ dans la direction radiale.

Remarque Ne préserve par contre pas les angles !

1.4 Le disque de Poincaré

Définition Par projection sur $\{x_0 = 1\}$ dans la direction de $(-1, 0, 0)$.

Propriété L'image est le disque de rayon 1, B^2.

Propriété Dans le modèle du disque de Poincaré, la métrique hyperbolique s'écrit :

$$\frac{4}{(1-r^2)^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \ .$$

Propriété Ce modèle préserve les angles !

Propriété Envoie les points à distance ρ de $(1, 0, 0)$ sur les points à distance $r = \sinh(\rho)/(1 + \cosh(\rho)) = \tanh(\rho/2)$.

Propriété Dans le modèle du disque de Poincaré, les géodésiques sont les segments de cercles orthogonaux au cercle unité.

Preuve On se ramène à une géodésique qui est l'intersection avec H^2 du plan d'équation :

$$x_2 = \lambda x_0 \ ,$$

avec $\lambda > 1$. L'image d'un point (x_0, x_1, x_2) est le point de coordonnées $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, avec :

$$\overline{x}_1 = \frac{x_1}{x_0+1} \ , \ \ \overline{x}_2 = \frac{x_2}{x_0+1} \ ,$$

soit, inversement :

$$x_0 = \cosh(\rho) = 2\cosh^2(\rho/2) - 1 = \frac{2}{1-r^2} - 1 = \frac{1+r^2}{1-r^2} \ , \ \ x_0 + 1 = \frac{2}{1-r^2} \ ,$$

$$x_1 = \overline{x}_1(x_0+1) = \frac{2\overline{x}_1}{1-r^2} \ , \ \ x_2 = \frac{2\overline{x}_2}{1-r^2} \ .$$

L'équation de la projection de la géodésique est donc :

$$\frac{2\overline{x}_2}{1-r^2} = \lambda\frac{1+r^2}{1-r^2} \ ,$$

soit encore :

$$\lambda(1 + \overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2) = 2\overline{x}_2 \ ,$$

$$\overline{x}_1^2 + (\overline{x}_2 - \frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2} - 1 \ .$$

1.5 Le demi-plan de Poincaré

Définition Par inversion à partir du disque de Poincaré.

Propriété Modèle conforme.

Lemme La métrique est :
$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} .$$

Lemme L'élément d'aire est : $dx \wedge dy/y^2 = d(dx/y)$.

Lemme Action des isométries par :
$$z \to \frac{az + b}{cz + d} .$$

Corollaire On peut identifier le groupe des isométries de H^2 avec $PSL(2, \mathbf{R})$.

Preuve La multiplication de $PSL(2, \mathbf{R})$ correspond avec la composition des fractions.

Remarque Les actions des isométries sur le bord à l'infini sont les actions projectives sur $\mathbf{R}P^1$.

1.6 Comportements des géodésiques

Champs de Jacobi

Géodésiques asymptotiques

1.7 Le bord à l'infini

Définition Par le bord du modèle projectif ou du disque de Poincaré.

Définition Par les classes d'équivalence de géodésiques orientées, pour la relation d'équivalence d'être asymptotique.

Propriété Dans le modèle du demi-plan de Poincaré, droite (Ox) et point à l'infini.

Action à l'infini des isométries Agissent comme des transformations projectives réelles.

1.8 Horocycles

Fonctions de Busemann Ce sont les "distances aux points à l'infini".

Définition Soit $\xi \in S^1$, soit $x_0 \in H^2$. Pour tout $x \in H^2$, on définit $B_\xi(x_0, x) = \lim_{t \to \infty} d(x, \gamma(t)) - d(x_0, \gamma(t))$, où γ est une géodésique dont l'extremité est en ξ.

Propriété Cette limite existe et est indépendante du choix de γ.

Définition Les *horocycles* sont les ensembles de niveau des fonctions de Busemann. A chaque horocycle est associé un point à l'infini, son "centre".

Courbure géodésique

Représentation dans les différents modèles

1.9 Géométrie du triangle

La formule de Gauss-Bonnet Soit (a, b, c) un triangle hyperbolique dont les angles aux sommets sont α, β, γ. Alors son aire est $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Remarque En particulier, la somme des angles d'un triangle n'est pas égale à π !

Preuve Il suffit de le montrer pour les triangles dont un sommet est à l'infini. Pour ce cas, ou utilise le modèle du demi-plan de Poincaré, en envoyant le sommet idéal sur le point à l'infini.

Formule fondamentale de la géométrie du triangle Soit (a, b, c) un triangle hyperbolique général, avec un angle θ en a. Montrer que :

$$\cosh(A) = \cosh(B)\cosh(C) - \cos(\theta)\sinh(B)\sinh(C) \ .$$

Preuve On se place dans le modèle de l'hyperboloïde. Soit u, v les vecteurs unitaires en a dans la direction de b, c respectivement. Alors :

$$b = \cosh(C)a + \sinh(C)u, c = \cosh(B)a + \sinh(B)v \ ,$$

$$\cosh(\theta) = \langle u, v\rangle \ .$$

On obtient le résultat en utilisant que :

$$\cosh(A) = \langle b, c\rangle \ .$$

Le triangle idéal C'est un triangle dont les trois sommets sont à l'infini.

Propriété Soit T, T' deux triangles idéaux. Il existe une isométrie hyperbolique qui envoie T sur T'. Tous les triangles idéaux ont pour aire π.

Exercices

1 Donner une caractérisation géométrique des horosphères dans le modèle de l'hyperboloïde.

2 Soit $g_1, g_2 : \mathbf{R} \to H^2$ deux géodésiques paramétrées à vitesse constante. Montrer que la fonction :

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbf{R}\times\mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & (s,t) & \mapsto & d(g_1(s), g_2(t)) \end{array}$$

est convexe. Comparer avec le cas euclidien.

3 Soit $\theta \in (0, \pi/3)$. Montrer qu'il existe un triangle régulier dont les angles sont égaux à θ, est qu'il est unique aux isométries de H^2 près. Peut-on donner un énoncé ananlogue pour les polygones réguliers à 4 cotés ?

4 Montrer qu'il existe un analogue du modèle projectif pour S^2, qui envoie un hémisphère sur le plan.

5 Montrer qu'il existe un analogue du modèle du disque de Poincaré pour S^2, qui envoie le complémentaire d'un point sur le plan de manire conforme.

6 Montrer l'existence de la connexion de Levi-Civita d'une métrique quelconque.