Géométrie hyperbolique
Cours de D.E.A., 2003-04

Jean-Marc Schlenker[1]

Oct. 2003 (v0)

[1]Laboratoire Emile Picard, UMR CNRS 5580, UFR MIG, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, France. schlenker@picard.ups-tlse.fr ; http ://picard.ups-tlse.fr/~schlenker.

Table des matières

1 Géométrie du plan hyperbolique **7**
1.1 La géométrie de la sphère . . . 7
1.2 Le plan hyperbolique comme quadrique . . . 10
1.3 Le modele projectif . . . 11
1.4 Le disque de Poincaré . . . 11
1.5 Le demi-plan de Poincaré . . . 12
1.6 Comportements des géodésiques . . . 14
1.7 Le bord à l'infini . . . 15
1.8 Horocycles . . . 16
1.9 Géométrie du triangle . . . 17

2 L'espace hyperbolique **21**
2.1 Les principaux modèles . . . 21
2.2 Les isométries comme transformations projectives complexes . . . 22
2.3 Plans géodésiques . . . 24
2.4 Fonctions de Busemann, horosphères . . . 25

3 Surfaces hyperboliques **27**
3.1 Les surfaces . . . 27
3.2 La formule de Gauss-Bonnet, le retour . . . 28
3.3 Construction de surfaces hyperboliques par recollements de pantalons . . . 29
3.4 Découpage des surfaces en pantalons . . . 29
3.5 Déformations locales de surfaces . . . 30
3.6 Le revêtement universel . . . 30
3.7 Les surfaces hyperboliques comme quotient . . . 30
3.8 Surfaces de Riemann . . . 31
3.9 Le théoreme d'uniformisation de Poincaré . . . 31
3.10 Découpage des surfaces hyperboliques . . . 31
3.11 L'espace de Teichmüller . . . 31

4 Variétés hyperboliques **31**
4.1 Les variétés de dimension 3 . . . 31
4.2 Le revêtement universel . . . 31
4.3 Conditions topologiques . . . 31
4.4 La conjecture d'hyperbolisation de Thurston . . . 31
4.5 Comment construire des variétés hyperboliques . . . 31

5 Le théorème de rigidité de Mostow **33**

Chapitre 2

L'espace hyperbolique

Motivations

Après avoir bien compris la géométrie du plan hyperbolique, on va décrire l'espace hyperbolique de dimension 3. Une partie de la description est presque la même que pour le plan hyperbolique, en particulier tout ce qui concerne les différents modèles. Ceci se généralisera d'ailleurs sans aucun mal aux dimensions supérieures.

Par contre, l'analyse du groupe des isométries est différente ; là où apparaissait $PSL(2, \mathbf{R})$ en dimension 2, on va voir apparaître $PSL(2, \mathbf{C})$ en dimension 3. L'une des manières de l'expliquer est en reférence à l'action de groupe des isométries sur le bord à l'infini.

2.1 Les principaux modèles

L'espace de Minkowski de dimension 4 C'est le cadre "réel" de la relativité restreinte.

Le modèle de l'hyperboloïde

Métrique, connexion, courbure Les définitions sont analogues à celle du plan hyperbolique. L'opérateur de courbure est encore antisymétrique par rapport à (x, y) et à (z, t), et symétrique par rapport à l'échange de (x, y) et de (z, t). Dans une base orthonormée (u, v, w), on a :

$$\langle R_{u,v}v, u\rangle = -1 \ ,$$

$$\langle R_{u,v}u, w\rangle = 0 \ ,$$

les autres valeurs s'en déduisent.

Preuve Comme dans le plan hyperbolique.

Le groupe des isométries

Définition On note $O(3,1)$ le groupe des isométries de $\mathbf{R}^4_1$ qui préserve l'origine, $SO(3,1)$ le sous-groupe des éléments qui préservent l'orientation, et $O_+(3,1)$ le sous-groupe des éléments pour lesquels la première coordonnée de l'image de $(1,0,0,0)$ est positive.

Propriété $O_+(3,1)$ agit transitivement sur les repères orthonormés de H^3.

Le modèle projectif La métrique d'écrit :

$$\frac{dr^2}{(1-r^2)^2} + \frac{h_r}{1-r^2}$$

Le disque de Poincaré C'est maintenant une boule, on l'appelle encore “disque” par habitude... La métrique est :

$$\frac{4}{(1-r^2)^2}(dx^2+dy^2+dz^2)$$

Le demi-espace de Poincaré

Définition Il est obtenu à partir du disque de Poincaré, mais on n'a plus d'interprétation complexe, on se contente de faire une inversion :

$$\begin{array}{rccl} \rho : & D^3 & \to & \mathbf{R}^3_+ \\ & v & \mapsto & \frac{(0,0,1)-v}{\|v-(0,0,1)\|^2} - (0,0,1/2)\ . \end{array}$$

On vérifie que cette application est bien à valeurs dans $\mathbf{R}^3_+$, car la coordonnée suivant z de $\rho(v)$ est nulle ssi $\|v\|=1$, et on constate que l'image de 0 est bien dans le bon demi-espace.

Champs de Jacobi Comme dans le cas du plan. On en déduit l'existence de géodésiques asymptotiques, et on peut définir le bord à l'infini comme quotient.

Géodésiques asymptotiques Comme dans le cas du plan. On en déduit une définition possible du bord à l'infini.

Le bord à l'infini On peut le voir dans n'importe lequel des 3 modèles.

Propriété Les géodésiques de H^3 sont uniquement déterminées par leurs extrémités, qui sont des points distincts dans $\partial_\infty H^3$.

2.2 Les isométries comme transformations projectives complexes

Définition $\mathbf{C}P^1$ comme l'espace projectif sur $\mathbf{C}^2$.

Définition Une transformation projective complexe sur $\mathbf{C}P^1$ est l'application induite sur $\mathbf{C}P^1$ par une application complexe linéaire inversible sur $\mathbf{C}^2$.

NB On a une identification naturelle de $\mathbf{C}P^1$ privé d'un point avec $\mathbf{C}$, par l'application $[z_1, z_2] \mapsto z_1/z_2$. Dans $\mathbf{C}$, les applications projectives complexes agissent par :

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} ,$$

avec $a, b, c, d \in \mathbf{C}$.

Lemme On peut identifier $\mathbf{C}P^1$ avec S^2, avec sa structure conforme usuelle.

Preuve Par définition, $\mathbf{C}P^1 := \mathbf{C}^2/\mathbf{C}^*$, où $\mathbf{C}^*$ agit par multiplication sur les deux facteurs. Or on peut identifier :

$$S^2 := \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \wedge Im(z_2) = 0\} .$$

Or étant donné $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$, il existe un unique $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tel que $Im(z_2/\lambda) = 0$ et que $|z_1/\lambda| + |z_2/\lambda| = 1$, d'où l'identification. Par construction c'est une application complexe de $\mathbf{C}P_1$ sur S^2 munie de sa structure complexe canonique.

Propriété Les transformation projectives complexes agissent sur S^2 en préservant la structure complexe et les cercles. Par contre, ça ne préserve pas du tout la “taille” des cercles.

Preuve Par identification avec $\mathbf{C}$ avec un point à l'infini... L'identification correspond à l'application stéréographique, quand on passe par $[z_1, z_2] \mapsto z_1/z_2$. Il suffit de montrer que l'image réciproque de $\{|z| = 1\}$ est un cercle ou une droite, or un calcul direct permet de l'obtenir.

Exemple Les homothéties sont projectives conformes. De même pour les inversions, i.e. $z \mapsto 1/z$.

Lemme Une transformation complexe bijective de $\mathbf{C}P^1$ dans lui-même est une transformation projective complexe.

Preuve En composant par une transformation projective complexe, on peut se ramener à l'étude d'une transformation complexe u qui fixe 0 et ∞. Posons :

$$v(z) := \frac{1}{u(1/z)} ,$$

alors v fixe encore 0 et ∞ et on a un développement :

$$v(z) = v_1 z + v_2 z^2 + \cdots$$

avec $v_1 \neq 0$ car v est bijective au voisinage de 0. Donc $\lim_0 v(z)/z = v_1$, donc $\lim_0 zu(1/z) = 1/v_1$, donc $\lim_\infty u(z)/z = 1/v_1$. Donc $u(z)/z$ est une fonction holomorphe bornée, donc elle est constante, et donc $u(z) = az$ est une transformation projective complexe.

NB Attention les transformations conformes ne sont pas toujours complexes, c'est vrai ssi elles préservent l'orientation. Sinon elles sont anti-holomorphes.

Remarque On peut identifier le bord à l'infini de H^3 avec $\mathbf{C}P^1 = S^2$ — dans n'importe lequel des 3 modèles : projectif, disque de Poincaré, demi-espace de Poincaré. En effet :

- le bord est muni, dans chacun des modèles, d'une structure conforme, et ces structures conformes sont les mêmes ;
- les isométries agissent en préservant cette structure conforme, c'est clair en particulier dans les modèles de Poincaré.

Lemme Les action sur le bord à l'infini des isométries préservant l'orientation sont exactement les transformations projectives complexes.

Preuve On sait que les actions à l'infini des isométries sont des transformations conformes, complexes si elles préservent l'orientation. Ce sont donc des transformations projectives complexes. Réciproquement on vérifie directement, en utilisant un modèle, que les transformations projectives complexes sont les valeurs au bord des isométries de H^3.

Propriété Une isométrie hyperbolique est uniquement déterminée par l'image de trois points à l'infini.

Preuve C'est une propriété des transformations projectives complexes, on peut considérer l'image des points $0, 1, \infty$. Pour le montrer, on remarque que si on connaît l'image de ces trois points — soit $0 = [0, 1], 1 = [1, 1], \infty = [1, 0]$ — par une matrice 2×2 de déterminant 1, on peut retrouver la matrice.

2.3 Plans géodésiques

Définition Dans le modèle de Poincaré, ce sont les intersections de H^2 avec les plans de dimension 3 contenant 0.

Propriété Dans un plan géodésique P, deux points quelconques sont joints par une unique géodésique qui reste dans P. Toute géodésique dont les extrémités sont dans un plan géodésique est elle-même dans ce plan.

Preuve Par définition dans le modèle de Minkowski.

Propriété Dans le modèle projectif, les plans géodésiques sont les intersections de la boule avec les plans euclidiens.

Propriété Dans le modèle du disque de Poincaré (resp. du demi-espace), les plans géodésiques sont les demi-sphères orthogonales au bord (resp. les demi-sphères ou demi-plans orthogonaux au bord).

Propriété Chaque plan géodésique, muni de sa métrique induite, est isométrique au plan hyperbolique.

2.4 Fonctions de Busemann, horosphères

Définition Fonctions de Buseman : définies comme dans le plan hyperbolique.

Définition Les horosphères sont les surfaces de niveau des fonctions de Busemann.

Propriété Dans le modèle du disque de Poincaré, ce sont les sphères tangentes au bord. Dans le demi-espace de Poincaré, ce sont les plans horizontaux et les sphères tangentes au bord.

Propriété chaque horosphère, munie de sa métrique induite, est isométrique au plan euclidien.

Preuve Dans le demi-espace de Poincaré.