Géométrie hyperbolique
Cours de D.E.A., 2003-04

Jean-Marc Schlenker[1]

Oct. 2003 (v0)

[1]Laboratoire Emile Picard, UMR CNRS 5580, UFR MIG, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, France. schlenker@picard.ups-tlse.fr ; http ://picard.ups-tlse.fr/~schlenker.

Table des matières

1 Géométrie du plan hyperbolique **7**
- 1.1 La géométrie de la sphère . . . 7
- 1.2 Le plan hyperbolique comme quadrique . . . 10
- 1.3 Le modele projectif . . . 11
- 1.4 Le disque de Poincaré . . . 11
- 1.5 Le demi-plan de Poincaré . . . 12
- 1.6 Comportements des géodésiques . . . 14
- 1.7 Le bord à l'infini . . . 15
- 1.8 Horocycles . . . 16
- 1.9 Géométrie du triangle . . . 17

2 L'espace hyperbolique **21**
- 2.1 Les principaux modèles . . . 21
- 2.2 Les isométries comme transformations projectives complexes . . . 22
- 2.3 Plans géodésiques . . . 24
- 2.4 Fonctions de Busemann, horosphères . . . 25

3 Surfaces hyperboliques **27**
- 3.1 Les surfaces . . . 27
- 3.2 La formule de Gauss-Bonnet, le retour . . . 28
- 3.3 Polygones à angles droit . . . 29
- 3.4 Pantalons . . . 30
- 3.5 Découpage des surfaces en pantalons . . . 31
- 3.6 Le revêtement universel . . . 32
- 3.7 Les surfaces hyperboliques comme quotient . . . 34
- 3.8 Structures conformes sur les surfaces . . . 34
- 3.9 Un théorème d'uniformisation . . . 36
- 3.10 L'espace de Teichmüller . . . 37

4 Introduction aux variétés hyperboliques de dimension 3 **41**
- 4.1 Propriétés de base . . . 41
- 4.2 Comment construire des variétés hyperboliques . . . 42
- 4.3 Conditions topologiques, la conjecture d'hyperbolisation . . . 42
- 4.4 Les principaux énoncés . . . 43

Chapitre 4

Introduction aux variétés hyperboliques de dimension 3

Motivations

Définition. Une variété hyperbolique est une variété munie d'une métrique localement isométrique à l'espace hyperbolique.

Propriété Toute variété hyperbolique complète est le quotient de l'espace hyperbolique par un groupe d'isométries qui agit isométriquement.

Un exemple explicite de variété hyperbolique compacte.

Une construction moins explicite mais plus générale.

Explication. C'est difficile de trouver des exemples à cause du théorème de rigidité de Mostow : si une variété hyperbolique admet une métrique hyperbolique, alors elle est unique.

Conditions topologiques.

La conjecture d'hyperbolisation de Thurston.

4.1 Propriétés de base

Définition Une variété hyperbolique (de dim 3) est une variété munie d'une métrique localement isométrique à celle de l'espace hyperbolique (de dim 3).

Théorème Les variétés hyperboliques sont des quotients de H^3 par un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbf{C})$.

4.2 Comment construire des variétés hyperboliques

C'est assez difficile de construire des exemples de variété hyperboliques de dimension 3 fermées ! Deux approches : par une construction géométrique, ou par une construction arithmétique. On va voir un exemple de construction géométrique, il y en a d'autres.

Les dodécaèdres hyperboliques réguliers.

Propriété Les angles dièdres du dodécaèdre régulier (euclidien) sont supérieurs à $2\pi/5$.

Preuve On considère leur link, c'est un triangle sphérique dont les arêtes sont de longueur $3\pi/5$, car les faces ont des angles extérieurs égaux à $\pi/5$ par Gauss-Bonnet. On utilise ensuite la formule de géométrie du triangle sphérique :

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \cos(\alpha)\sin(b)\sin(c) \ .$$

Propriété Les angles dièdres du dodécaèdre régulier idéal (hyperbolique) sont égaux à $\pi/3$.

Preuve On considère leur link, i.e. l'intersection d'un voisinage d'un sommet avec l'horosphère correspondante, qui est un plan euclidien. C'est un triangle équilatéral, donc ses angles sont égaux à $\pi/3$.

Corollaire Il existe un dodécaèdre régulier hyperbolique dont les angles dièdres sont égaux à $2\pi/5$.

Propriété Il existe un recollement des faces (opposées) de ce polyèdre qui conduit à une variété hyperbolique fermée.

Principe de la construction : On doit regrouper les arêtes en 6 groupes de 5, de manière que l'angle total soit 2π. Il suit nécessairement que l'objet recollé est une variété, considérer pour cela le link d'un sommet.

4.3 Conditions topologiques, la conjecture d'hyperbolisation

Surfaces minimales

Définition Ce sont les surfaces dont la courbure moyenne est nulle.

Propriété La métrique induite sur une surface minimale dans une variété hyperbolique est à courbure $K \leq -1$.

Corollaire Une surface minimale ne peut être ni une sphère, ni un tore.

Propriété Une surface qui minimise son aire parmi les surfaces qui lui sont homotopes est minimale.

Preuve On calcule la variation première de l'aire lors d'une déformation normale de la surface, on trouve que c'est proportionnel à fH, où f est l'ampleur de la déformation et H est la courbure moyenne.

Théorème Dans toute classe non triviale d'homotopie de surfaces, dans une variété de dimension 3, il en existe une qui est minimale.

NB C'est un résultat délicat, admis ici. C'est vrai en dimension au plus 7.

Tores incompressibles.

Exemple Somme connexe de deux variétés ; exemple du tore de dimension 3, qui contient des tores pas incompressibles.

Corollaire Dans une variété hyperbolique de dimension 3, toute sphère doit border une boule, et tout tore doit être "compressible".

Exemple Somme connexe de deux variétés ; exemple du tore de dimension 3, qui contient des tores pas incompressibles.

Décompositions de variétés. Existence d'une unique décomposition d'une variété de dimension 3 fermée en somme connexe de variétés irréductibles et de $S^1 \times S^2$.

4.4 Les principaux énoncés

Théorème Si une variété fermée de dimension $n \geq 3$ admet une métrique hyperbolique, elle est unique.

NB Contraste avec la dim 2, et aussi avec les métriques plates. Valable aussi pour les métriques hyperboliques de volume fini.

Conjecture : Une variété fermée de dim 3, irréductible et atoroidale, admet une métrique hyperbolique.

NB Cas particulier d'une conjecture plus générale, de "géométrisation" des variétés irréductibles de dimension 3.