Géométrie hyperbolique
Cours de D.E.A., 2003-04

Jean-Marc Schlenker[1]

Oct. 2003 (v0)

[1]Laboratoire Emile Picard, UMR CNRS 5580, UFR MIG, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, France. schlenker@picard.ups-tlse.fr ; http ://picard.ups-tlse.fr/~schlenker.

Table des matières

Introduction

La géométrie hyperbolique dans l'histoire

Une motivation : l'axiome des parallèles Dans ses "Eléments", Euclide utilise un axiome qui peut se formuler sous différentes formes, par exemple :

> La somme des angles d'un triangle est égale à π.

Dès la renaissance, la question se pose de savoir si cet axiome est vraiment nécessaire.

La découverte de la géométrie hyperbolique Par Bolyai et Lobatchevsky, indépendamment, un peu avant 1850. Elle vérifie tous les axiomes d'Euclide, sauf l'axiome des parallèles : la somme des angles d'un triangle est inférieure à π.

Quelques aspects de la géométrie hyperbolique Dès sa découverte, des mathématiciens développent certains aspects riches et subtils de la géométrie hyperbolique, par exemple la théorie des polyèdres (Schläfli, etc).

Qu'est-ce que le plan hyperbolique ? C'est une surface difféomorphe au plan (ou a un disque), munie d'une *métrique*, c'est à dire d'une manière de mesurer la longueur des courbes. Il y a des *droites* — qui minimisent la distance entre leurs points. Mais la géométrie est plus riche que dans le plan euclidien. On a un *bord à l'infini*, équivalent à la droite projective réelle, et d'autres structures (par exemple les *horocycles*).

Les variétés hyperboliques

Les surfaces Ce sont des variétés de dimension 2, pour lesquelles chaque point "ressemble localement à $\mathbf{R}^2$".

Les surfaces hyperboliques Ce sont des surfaces munies d'une métrique — une manière de mesurer la longueur des courbes — qui est localement isométrique au plan hyperbolique. On peut comprendre à quoi ressemble l'ensemble des surfaces hyperboliques, c'est la *théorie de Teichmüller*.

Liens avec les surfaces de Riemann Ce sont des surfaces, munies d'une structure complexe. A chaque surface de Riemann, on associe uniquement une surface hyperbolique, et réciproquement.

Liens avec la théorie des nombres Les *forme modulaires*, qui "vivent" sur des surfaces hyperboliques, jouent un rôle fondamental dans la théorie des nombres, c.f. la preuve du théorème de Fermat par Wiles.

Le théorème d'uniformisation de Poincaré Les surfaces fermées (compactes sans bord) sont classifiées à déformation près. Quand elles sont orientables, elles sont classifiées par leur "genre". Poincaré a montré que chaque surface admet une métrique localement sphérique (pour la sphère), euclidienne (pour le tore) ou hyperbolique (pour toutes les autres). Il n'y a pas unicité, pour les métriques hyperboliques.

Les variétés hyperboliques de dimension 3 Elles sont beaucoup plus délicates à comprendre que les surfaces hyperboliques. On donnera deux méthodes pour construire de telles variétés, et des conditions sous lesquelles une variété de dimension 3 ne peut pas admettre de métrique hyperbolique.

La conjecture de géométrisation de Thurston

Géométrie hyperbolique et cosmologie L'univers est-il une variété hyperbolique, plate ou sphérique ? C'est une question que les cosmologues se posent très sérieusement...

La géométrie des groupes

Une idée forte des maths contemporaines : appliquer des notions issues de la géométrie hyperbolique pour l'étude des groupes discrets.

En particulier, une variété hyperbolique est "proche" (en un sens précis) de son groupe fondamental.

Chapitre 1

Géométrie du plan hyperbolique

Motivations

Objectifs du chapitre :

1. Comprendre la définition du plan hyperbolique.
2. Maîtriser les différents modèles qui permettent de le comprendre heuristiquement.
3. Maîtriser ses propriétés élémentaires, par exemple la géométrie des triangles hyperboliques.
4. Notion de bord à l'infini, d'horocycle, de fonction de Busemann.

1.1 La géométrie de la sphère

Définition $S^2 \subset \mathbf{R}^3$.

Notion de métrique Forme bilinéaire symétrique définie positive sur les espaces tangents. Permet de définir la longueur d'une courbe. On peut la noter $I(x, y)$, ou bien $\langle x, y \rangle$.

Définition Distance associée : par l'inf des longueurs des courbes reliant deux points.

Groupe des isométries C'est un point crucial : S^2 est *homogène et isotrope*, c'est à dire que :

- "chaque point ressemble à chaque autre" (leurs voisinages).
- si on se place en un point et qu'on "regarde" dans deux directions différentes, on "voit" la même chose.

Définition On note $O(3)$ le groupe de Lie des transformations linéaires de $\mathbf{R}^3$ qui préservent la métrique. On note $SO(3)$ le sous-groupe des éléments de déterminant 1.

Propriété $O(3)$ agit de manière *transitive* sur les vecteurs unitaires de S^2. De même pour $SO(3)$.

Preuve Par action de $O(3)$ sur les bases orthonormées de $\mathbf{R}^3$.

La connexion naturelle On considère une surface S avec son fibré tangent TS.

Définition Une *connexion* est un opérateur D qui à deux sections de TS, soit x, y, en associe une troisième, $D_x y$, telle que :
- $D_x y$ est une application linéaire en x.
- $D_x(y+z) = D_x y + D_x z$, mais $D_x(fy) = df(x)y + fD_x y$.

Exemple On note ∇^0 la connexion plate de $\mathbf{R}^3$.

Proposition Soit (S, g) une surface munie d'une métrique riemannienne. Il existe une unique connexion ∇ sur TS, la *connexion de Levi-Cività* de (S, g), telle que :
- ∇ est *sans torsion* : $\nabla_x y - \nabla_y x = [x, y]$, où $[,]$ est le crochet de Lie sur S.
- ∇ est *compatible* avec g : $x.g(y, z) = g(\nabla_x y, z) + g(y, \nabla_x z)$.

Preuve Si ∇ vérifie ces propriétés, on doit avoir :

$$2g(\nabla_x y, z) = x.g(y,z)+y.g(x,z)-z.g(x,y)+g([x,y],z)-g([x,z],y)-g([y,z],x) .$$

Cette relation détermine uniquement la connexion ∇. Réciproquement, il faut montrer que cette relation définit bien une connexion, et qu'elle est sans torsion et compatible (exercice).

Exercice Montrer que ∇^0 est la connexion de Levi-Civita de $\mathbf{R}^3$.

Propriété La connexion de Levi-Cività de S^2 est définie par projection de ∇^0 sur S^2 : $\nabla_x y = \Pi(\nabla^0_x y)$.

Fin du cours no 1

Interprétation de la connexion C'est une manière de comparer les vecteurs en deux points différents. Mais la comparaison dépend du chemin choisi ! Ex. pour un petit tour qui revient à son point de départ. D'où la notion de courbure.

Transport parallèle le long d'une courbe Etant donné une courbe plongée γ et un vecteur $v \in T_{\gamma(0)}S^2$, il existe un unique champ de vecteur le long de γ, parallèle, qui prend la valeur v en $\gamma(0)$.

Courbure C'est une notion fondamentale en géométrie riemannienne, qui prend une forme plus simple en géométrie sphérique ou hyperbolique.

Définition-propriété

1. Soit x, y, z des champs de vecteurs sur S^2. En un point m, la valeur du champs :
$$R_{x,y}z := \nabla_x(\nabla_y z) - \nabla_y(\nabla_x z) - \nabla_{[x,y]}z$$
ne dépend que de la valeur de x, y, z en m.
2. L'expression $\langle R_{x,y}z, t\rangle$ est antisymétrique en x, y et en z, t, et symétrique par rapport à $(x, y), (z, t)$.
3. Si x, y est un repère orthonormé, alors $\langle R_{x,y}y, x\rangle = 1$.

Remarque Les points (1) et (2) sont vrais pour toute métrique riemannienne sur une variété. R est le *tenseur de courbure de Riemann*. Le point (3) est spécifique à la sphère, on dit que c'est une surface à courbure constante 1.

Preuve On remarque que si on définit R pour ∇^0 au lieu de ∇, on trouve 0. On sait aussi que, si x et y sont tangents :
$$\nabla^0_x y = \nabla_x y + II(x, y)N ,$$
où II est la seconde forme fondamentale de S^2, ici $II = I$, symétrique, et que :
$$\nabla^0_x N = -x .$$
On en déduit le résultat par un calcul direct.

Géodésiques Ce sont les généralisation de la notion de droite.

Définition Soit Soit $\gamma : I \to S^2$ une application régulière. Sa connexion géodésique est définie par :
$$\frac{1}{\|\gamma'(s)\|}\langle\nabla_{\gamma'(s)}\gamma'(s), \nu\rangle ,$$
où ν est la normale unitaire orientée de γ.

Propriété C'est indépendant de la paramétrisation (si on préserve la direction) !

Définition γ est une géodésique si et seulement si sa connexion géodésique est nulle.

Proposition Soit $x \in S^2$ et soit $v \in T_x S^2$. Il existe une unique géodésique $\gamma : \mathbf{R}_+ \to S^2$, paramétrée à vitesse constante, avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

Preuve Par l'application du théorème de Cauchy-Lipschitz au fibré tangent de S^2.

Propriété Soit $x \in \gamma$, il existe un voisinage U de x dans γ tel que, pour tout $y \in U$, le segment de γ entre x et y réalise la distance entre x et y.

Preuve Admis ici.

Proposition Les géodésiques de S^2 sont les intersections avec S^2 des plans contenant 0.

Preuve Par symétrie pour la courbure géodésique.

Propriété
- Toutes les géodésiques sont de longueur 2π.
- Deux géodésiques distinctes se rencontrent toujours en deux points antipodaux.

1.2 Le plan hyperbolique comme quadrique

L'espace de Minkowski C'est un espace qui joue un rôle fondamental dans la relativité restreinte.

Définition R^3_1 est $\mathbf{R}^3$ muni de la métrique :

$$\langle x, y\rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 \ .$$

Définition Une droite est de type espace, lumière ou temps, etc.

Définition De même pour les 2-plans et pour les hyperplans.

Définition On note $O(2,1)$ le groupe de Lie des transformations linéaires de $\mathbf{R}^3$ qui préservent la métrique de $\mathbf{R}^3_1$, et $SO(2,1)$ le sous-groupe de ceux qui sont de déterminant 1. On note $O_+(2,1)$ le sous-groupe de $O(2,1)$ le sous-groupe des éléments u tels que :

$$\langle u(e_0), e_0\rangle > 1 \ .$$

On note $SO_+(2,1) = O_+(2,1) \cap SO(2,1)$.

Propriété Les éléments de $O(2,1)$ sont les applications linéaires dont les colonnes des matrices forment des bases orthonormées pour $\langle,\rangle$.

Remarque Les symétries orthogonales par rapport aux plans de type temps sont dans $O_+(2,1)$.

Définition du plan hyperbolique

Définition On note :

$$H^2 := \{x \in \mathbf{R}^3_1 \mid x_0 > 0 \wedge \langle x, x\rangle = -1\} \ ,$$

muni de la métrique induite, qui est riemannienne.

Propriété H^2 est invariant sous l'action de $O_+(2,1)$, qui agit par isométries.
Fin du cours no 2 $SO_+(2,1)$ agit transitivement sur le fibré unitaire de H^2.

Connexion Comme dans le cas de la sphère.

Courbure Similaire au cas de la sphère, mais on a maintenant, si x, y forment une base orthonormée :

$$\langle R_{x,y}y, x\rangle = -1 \ .$$

On dit que H^2 est à courbure constante -1.

Géodésiques Définition par la courbure géodésique.

Propriété Les géodésiques de H^2 sont les intersections avec H^2 des plans vectoriels de type temps de $\mathbf{R}^3_1$.

1.3 Le modele projectif

Objectif Essayer de comprendre le plan hyperbolique en le "représentant" comme un domaine de $\mathbf{R}^2$, en préservant certaines de ses propriétés.

Définition Par projection sur $x_0 = 1$ dans la direction de 0.

Propriété L'image est la boule de rayon 1, B^2. Les géodésiques de H^2 sont envoyés sur les segments de B^2.

Preuve Ce sont les intersections avec les plans vectoriels de type temps.

Propriété Les points à distance ρ de $(1, 0, 0)$ sont envoyés sur les points à distance $\tanh(\rho)$ de 0.

Propriété Soit $x, y \in H^2$, soit ρ la distance hyperbolique entre eux. Alors $\langle x, y\rangle = \cosh(\rho)$.

Preuve Il suffit de prendre $x = 0$ grâce à l'action de $SO(2, 1)$.

Propriété Dans le modèle projectif, la métrique du plan hyperbolique s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{1 - r^2} h_r + \frac{1}{(1 - r^2)^2} dr^2 \ ,$$

où h_r est la métrique de la sphère de rayon r.

Preuve Par coefficient de projection latérale égal à $\cosh(\rho)$ par le modèle projectif, et égal à $1/\tanh'(\rho) = \cosh^2(\rho)$ dans la direction radiale.

Remarque Ne préserve par contre pas les angles !

1.4 Le disque de Poincaré

Définition Par projection sur $\{x_0 = 0\}$ dans la direction de $(-1, 0, 0)$.

Propriété L'image est le disque de rayon 1, B^2.

Propriété Dans le modèle du disque de Poincaré, la métrique hyperbolique s'écrit :

$$\frac{4}{(1-r^2)^2}(dx^2+dy^2) \ .$$

Propriété Ce modèle préserve les angles !

Propriété Envoie les points à distance ρ de $(1,0,0)$ sur les points à distance $r = \sinh(\rho)/(1+\cosh(\rho)) = \tanh(\rho/2)$.

Propriété Dans le modèle du disque de Poincaré, les géodésiques sont les segments de droite ou de cercles orthogonaux au cercle unité.

Preuve On se ramène à une géodésique qui est l'intersection avec H^2 du plan d'équation :

$$x_2 = \lambda x_0 \ ,$$

avec $\lambda < 1$. L'image d'un point (x_0, x_1, x_2) est le point de coordonnées $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, avec :

$$\overline{x}_1 = \frac{x_1}{x_0+1} \ , \quad \overline{x}_2 = \frac{x_2}{x_0+1} \ ,$$

soit, inversement :

$$x_0 = \cosh(\rho) = 2\cosh^2(\rho/2) - 1 = \frac{2}{1-r^2} - 1 = \frac{1+r^2}{1-r^2} \ , \quad x_0 + 1 = \frac{2}{1-r^2} \ ,$$

$$x_1 = \overline{x}_1(x_0+1) = \frac{2\overline{x}_1}{1-r^2} \ , \quad x_2 = \frac{2\overline{x}_2}{1-r^2} \ .$$

L'équation de la projection de la géodésique est donc :

$$\frac{2\overline{x}_2}{1-r^2} = \lambda\frac{1+r^2}{1-r^2} \ ,$$

soit encore :

$$\lambda(1+\overline{x}_1^2+\overline{x}_2^2) = 2\overline{x}_2 \ ,$$

$$\overline{x}_1^2 + (\overline{x}_2 - \frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2} - 1 \ .$$

On vérifie alors (géométrie élémentaire) que ce sont bien des cercles orthogonaux au cercle unité.

1.5 Le demi-plan de Poincaré

Définition Par inversion à partir du disque de Poincaré ; on identifie $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$, et on pose :

$$\rho(z) = \frac{1}{z-i} - \frac{i}{2} \ .$$

Fin du cours no 3

ρ définit une application du disque D^2 dans $\mathbf{R}^2_+ := \mathbf{R}\times\mathbf{R}^+_*$.

Preuve On vérifie que $Im(\rho(z)) = 0$ ssi $|z| = 1$. Ou par construction et propriétés des inversions, qui envoient les cercles et les droites sur des cercles ou des droites.

Propriété Modèle conforme.

Preuve Par construction, car les applications holomorphes préservent les angles.

Propriété L'application ρ est donnée explicitement par :

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{y}{|z - i|^2}, \frac{1 - |z|^2}{2|z - i|^2} \right) \ .$$

Lemme La métrique est :

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \ .$$

Preuve Le coefficient de déformation conforme de la métrique par l'application ρ est donné par :

$$c(x, y) = \left| \frac{d\rho}{dz} \right| = \left| \frac{d}{dz} \frac{1}{z - i} \right| = \frac{1}{|z - i|^2} \ ,$$

c'est à dire que si on appelle x', y' les coordonnées dans le modèle du demi-espace, on a :

$$dx^2 + dy^2 = |z - i|^4 (dx'^2 + dy'^2) \ .$$

Or la métrique hyperbolique, dans le modèle du disque de Poincaré, est :

$$\frac{4}{(1 - r^2)^2} (dx^2 + dy^2) \ .$$

La métrique hyperbolique, dans le modèle du demi-espace, est donc :

$$\frac{4|z - i|^4}{(1 - |z|^2)^2} (dx'^2 + dy'^2) \ ,$$

qui est de la forme souhaitée d'après le calcul direct de ρ en coordonnées effectué plus haut.

Lemme L'élément d'aire est : $dx \wedge dy/y^2 = d(dx/y)$.

Lemme Action des isométries par :

$$z \to \frac{az + b}{cz + d} \ ,$$

où $ad - bc = 1$.

Preuve Soit $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ avec $ad - bc = 1$. On va montrer que c'est une isométrie. En effet, le facteur conforme de cette transformation est :

$$\left| \frac{d}{dz} \frac{az+b}{cz+d} \right| = \left| \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \right| = \frac{1}{|cz+d|^2} \ ,$$

donc :

$$dx^2 + dy^2 = |cz+d|^4 (dx'^2 + dy'^2) \ .$$

Mais si l'image de (x, y) est (x', y'), on a :

$$y' = \frac{y}{|cz+d|^2} \ .$$

On a donc :

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dx'^2 + dy'^2}{y'^2} \ ,$$

et la transformation est bien une isométrie.

On peut conclure en remarquant que les transformations de ce type agissent de manière transitive sur le fibré tangent unitaire de H^2 dans le modèle du demi-espace de Poincaré.

Corollaire On peut identifier le groupe des isométries de H^2 avec $PSL(2, \mathbf{R})$.

Preuve La multiplication de $PSL(2, \mathbf{R})$ correspond avec la composition des fractions.

Propriété Les géodésiques de H^2, dans le modèle du demi-espace, sont les demi-droites et le demi-cercles orthogonaux à l'axe des x.

Preuve Les géodésiques dans le modèle du disque de Poincaré sont des arcs de cercles (ou de droites) orthogonaux au bord. Après une inversion, les arcs de cercles ou de droite restent des arcs de droite ou de cercles, et l'orthogonalité au bord est aussi préservée.

Remarque Les actions des isométries sur le bord à l'infini sont les actions projectives sur $\mathbf{R}P^1$.

1.6 Comportements des géodésiques

Champs de Jacobi Correspondent à des déformations au premier ordre des géodésiques paramétrées à vitesse constante.

Définition Soit $\gamma : \mathbf{R} \to H^2$. Soit Y un champ de vecteurs défini le long de γ. Y est un champ de Jacobi s'il existe une famille à un paramètre de géodésiques paramétrées à vitesse constante, $(\gamma_t)_{t \in [0,1]}$, telle que $\gamma_0 = \gamma$ et que :

$$\frac{d\gamma_t}{dt} = Y \ .$$

Propriété Y est un champ de Jacobi ssi $Y(\gamma(s)) = u(s)\gamma'(s) + v(s)\nu(\gamma(s))$, avec $Z(\gamma(s))$ orthogonal à $\gamma'(s)$, et :
- $u(s)$ est une fonction affine ;
- $v(s) = a\cosh(s) + b\sinh(s)$, avec $a, b \in \mathbf{R}$.

Preuve On considère une famille à un paramètre de géodésiques. On suppose dans un premier temps que l'application $(t, s) \to \gamma_t(s)$ est injective. On pose $X = \partial_s\gamma_t(s)$. On note que $[\partial_s, \partial_t] = 0$, et comme le crochet de Lie est invariant par difféomorphismes, $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = 0$. Alors :

$$\nabla_X X = 0\ ,$$

donc, comme $[X, Y]$:

$$\nabla_Y\nabla_X X = 0\ ,$$
$$\nabla_X\nabla_Y X = R_{X,Y}X + \nabla_Y\nabla_X X,$$
$$\nabla_X\nabla_X Y = R_{X,Y}X\ .$$

Mais $R_{X,Y}X = R_{X,v\nu}X = v\nu$. Donc, comme X et ν sont parallèles le long des γ_t, on a :

$$u''(s) = 0, v''(s) = v\ ,$$

cqfd.

Géodésiques asymptotiques C'est une grande différence avec le cas euclidien ! En plus très utile pour définir le bord à l'infini du plan hyperbolique.

Définition Soit $c_1, c_2 : \mathbf{R} \to H^2$ deux géodésiques, paramétrées à vitesse 1. Elles sont asymptotiques en$+\infty$ ssi $\lim_{t\to\infty} d(c_1(t), c_2) = 0$. Fin du cours 4

Propriété Deux géodésiques sont asymptotiques si et seulement si leurs images dans le modèle projectif (resp. le modèle du disque de Poincaré, le modèle du demi-espace de Poincaré) ont la même extrémité.

Preuve Si les extrémités sont distinctes, les géodésiques ne peuvent pas être asymptotiques. Pour montrer la réciproque, on remarque que les applications entre les modèles, qui sont isométriques pour la métrique hyperbolique, sont continues jusqu'au bord. Il suffit donc de montrer le résultat pour l'un des 3 modèles, par exemple pour le modèle du demi-espace de Poincaré, lorsque le point extrémité n'est pas le point à l'infini (i.e quand c'est un point de l'axe réel).

Dans ce cas, les géodésiques correspondent à des arcs de cercle orthogonaux au bord, donc ils sont à distance euclidienne en y^2. Mais le facteur conforme de la métrique hyperbolique est $1/y$, donc la distance hyperbolique est en y, donc tend vers 0 au bord.

Remarque En fait $d(c_1(t), c_2)$ décroit de manière exponentielle en t.

1.7 Le bord à l'infini

Définition Par le bord du modèle projectif ou du disque de Poincaré.

Définition Par les classes d'équivalence de géodésiques orientées, pour la relation d'équivalence d'être asymptotique.

Propriété Etant donné deux points du bord à l'infini, il existe une unique géodésique ayant ces points comme extrémités.

Remarque Dans le modèle du demi-espace de Poincaré, les géodésiques dont une extrémité est sur le point à l'infini sont envoyées sur les droites verticales.

Action à l'infini des isométries Agissent comme des transformations projectives réelles. Dans différents modèles :
- Modèle projectif :
- Modèle du disque de Poincaré :
- Modèle du demi-espace de Poincaré :

1.8 Horocycles

Fonctions de Busemann Ce sont les "distances aux points à l'infini".

Définition Soit $\xi \in S^1$, soit $x_0 \in H^2$. Pour tout $x \in H^2$, on définit $B_\xi(x_0, x) = \lim_{t\to\infty} d(x, \gamma(t)) - d(x_0, \gamma(t))$, où γ est une géodésique dont l'extremité est en ξ.

Propriété Cette limite existe et est indépendante du choix de γ.

Définition Les *horocycles* sont les ensembles de niveau des fonctions de Busemann. A chaque horocycle est associé un point à l'infini, son "centre".

Définition Un *cercle géodésique* est l'ensemble des points à distance hyperbolique R d'un point donné.

Remarque Les horocycles sont des limites de cercles géodésiques.

Propriété Dans le modèle de l'hyperboloïde, les cercles sont les intersections de H^2 avec les plans affines de type espace.

Preuve Il suffit de le montrer lorsque le centre est un point de la forme $(\cosh(r), 0, \sinh(r))$, lorsque le cercle est de rayon r, puis on fait agir les isométries.

Propriété Dans le modèle de l'hyperboloïde, les horocycles sont les intersections de H^2 avec les plans de type lumière.

Preuve Conséquence de la propriété précédente en prenant une limite de cercles géodésiques.

Propriété Dans le modèle du disque de Poincaré, les cercles géodésiques ont pour image les cercles contenus dans le disque unité ouvert, et les horocycles ont pour image les cercles tangents au bord du disque.

Preuve On peut utiliser la définition du modèle de Poincaré par projection, et utiliser les propriétés concernant le modèle de l'hyperboloïde.

Propriété Dans le modèle du demi-espace de Poincaré, les cercles géodésiques ont pour image les cercles contenus dans les demi-espace, et les horocycles ont pour image les cercles tangents au bord et les droites horizontales. Fin du cours 5

Propriété Dans le modèle projectif, les horocycles ont pour image les ellipses de demi-grand axe ϵ, ϵ^2, et qui sont tangentes au bord en une des extrémités de leur petit axe.

Exercice Le montrer.

Courbure géodésique

Propriété La courbure des horocycle est partout égale à 1.

1.9 Géométrie du triangle

La formule de Gauss-Bonnet Soit (a, b, c) un triangle hyperbolique dont les angles aux sommets sont α, β, γ. Alors son aire est $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Remarque En particulier, la somme des angles d'un triangle n'est pas égale à π !

Preuve Il suffit de le montrer pour les triangles dont un sommet est à l'infini. En effet, l'angle au sommets idéaux est 0 (passer à la limite). Pour ce cas, ou utilise le modèle du demi-plan de Poincaré, en envoyant le sommet idéal sur le point à l'infini.

Formule fondamentale de la géométrie du triangle Soit (a, b, c) un triangle hyperbolique général, avec un angle θ en a. Montrer que :

$$\cosh(A) = \cosh(B)\cosh(C) - \cos(\theta)\sinh(B)\sinh(C) \ .$$

Preuve On se place dans le modèle de l'hyperboloïde. Soit u, v les vecteurs unitaires en a dans la direction de b, c respectivement. Alors :

$$b = \cosh(C)a + \sinh(C)u, c = \cosh(B)a + \sinh(B)v \ ,$$

$$\cosh(\theta) = \langle u, v\rangle \ .$$

On obtient le résultat en utilisant que :

$$\cosh(A) = \langle b, c\rangle \ .$$

Le triangle idéal C'est un triangle dont les trois sommets sont à l'infini.

Propriété Soit T, T' deux triangles idéaux. Il existe une isométrie hyperbolique qui envoie T sur T'. Tous les triangles idéaux ont pour aire π.

Preuve Parce que l'action de $PSL(2, \mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}P^1$ est transitive sur les triplets de points.

Exercices

1 Donner une caractérisation géométrique des horosphères dans le modèle de l'hyperboloïde.

2 Soit $g_1, g_2 : \mathbf{R} \to H^2$ deux géodésiques paramétrées à vitesse constante. Montrer que la fonction :

$$\begin{array}{rccl} d: & \mathbf{R} \times \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & (s,t) & \mapsto & d(g_1(s), g_2(t)) \end{array}$$

est convexe. Comparer avec le cas euclidien.

3 Soit $\theta \in (0, \pi/3)$. Montrer qu'il existe un triangle régulier dont les angles sont égaux à θ, est qu'il est unique aux isométries de H^2 près. Peut-on donner un énoncé ananlogue pour les polygones réguliers à 4 cotés ?

4 Montrer qu'il existe un analogue du modèle projectif pour S^2, qui envoie un hémisphère sur le plan.

5 Montrer qu'il existe un analogue du modèle du disque de Poincaré pour S^2, qui envoie le complémentaire d'un point sur le plan de manire conforme.

6 Montrer l'existence de la connexion de Levi-Civita d'une métrique quelconque.

7 1. Soit x, y, a, b, on appelle *birapport* de ces quatre points la quantité :

$$[x, y; a, b] := \frac{(x-a)(y-b)}{(x-b)(y-a)} \ .$$

Montrer que le birapport est invariant sous les transformations projectives de $\mathbf{R}$.

On considère le disque unité D^2. Soit $x, y \in D^2$ distincts, on appelle a, b les intersections de la droite (x, y) avec S^1, et on pose :

$$d_h(x, y) := -\frac{1}{2} \log[x, y; a, b] \ ,$$

et on appelle d_h la *distance de Hilbert* de D^2.

2. Montrer que, pour tout $x \in D^2$, $d_h(0, x) = \operatorname{argth}(|x|)$.

3. Montrer que les isométries hyperboliques agissent de manière projective dans le modèle projectif. En déduire que d_h est la distance associée à la métrique hyperbolique dans le modèle projectif.

On remplace maintenant D^2 par un domaine C relativement compact, strictement convexe, de $\mathbf{R}^2$.

4*. Montrer que, si $x, y, z \in D^2$, $d_h(x, y) \leq d_h(x, z) + d_h(y, z)$, avec égalité ssi $z \in [x, y]$.

5. Montrer que la distance d_h ne provient pas d'une métrique riemannienne, sauf si C est un ellipsoïde.

Chapitre 2

L'espace hyperbolique

Motivations

Après avoir bien compris la géométrie du plan hyperbolique, on va décrire l'espace hyperbolique de dimension 3. Une partie de la description est presque la même que pour le plan hyperbolique, en particulier tout ce qui concerne les différents modèles. Ceci se généralisera d'ailleurs sans aucun mal aux dimensions supérieures.

Par contre, l'analyse du groupe des isométries est différente ; là où apparaissait $PSL(2, \mathbf{R})$ en dimension 2, on va voir apparaître $PSL(2, \mathbf{C})$ en dimension 3. L'une des manières de l'expliquer est en reférence à l'action de groupe des isométries sur le bord à l'infini.

2.1 Les principaux modèles

L'espace de Minkowski de dimension 4 C'est le cadre "réel" de la relativité restreinte.

Le modèle de l'hyperboloïde

Métrique, connexion, courbure Les définitions sont analogues à celle du plan hyperbolique. L'opérateur de courbure est encore antisymétrique par rapport à (x, y) et à (z, t), et symétrique par rapport à l'échange de (x, y) et de (z, t). Dans une base orthonormée (u, v, w), on a :

$$\langle R_{u,v}v, u\rangle = -1 \ ,$$

$$\langle R_{u,v}u, w\rangle = 0 \ ,$$

les autres valeurs s'en déduisent.

Preuve Comme dans le plan hyperbolique.

Le groupe des isométries

Définition On note $O(3,1)$ le groupe des isométries de $\mathbf{R}^4_1$ qui préserve l'origine, $SO(3,1)$ le sous-groupe des éléments qui préservent l'orientation, et $O_+(3,1)$ le sous-groupe des éléments pour lesquels la première coordonnée de l'image de $(1,0,0,0)$ est positive.

Propriété $O_+(3,1)$ agit transitivement sur les repères orthonormés de H^3.

Le modèle projectif La métrique d'écrit :

$$\frac{dr^2}{(1-r^2)^2} + \frac{h_r}{1-r^2}$$

Le disque de Poincaré C'est maintenant une boule, on l'appelle encore "disque" par habitude... La métrique est :

$$\frac{4}{(1-r^2)^2}(dx^2+dy^2+dz^2)$$

Le demi-espace de Poincaré

Définition Il est obtenu à partir du disque de Poincaré, mais on n'a plus d'interprétation complexe, on se contente de faire une inversion :

$$\begin{array}{rccl} \rho : & D^3 & \rightarrow & \mathbf{R}^3_+ \\ & v & \mapsto & \frac{(0,0,1)-v}{\|v-(0,0,1)\|^2} - (0,0,1/2) \ . \end{array}$$

On vérifie que cette application est bien à valeurs dans $\mathbf{R}^3_+$, car la coordonnée suivant z de $\rho(v)$ est nulle ssi $\|v\| = 1$, et on constate que l'image de 0 est bien dans le bon demi-espace.

Champs de Jacobi Comme dans le cas du plan. On en déduit l'existence de géodésiques asymptotiques, et on peut définir le bord à l'infini comme quotient.

Géodésiques asymptotiques Comme dans le cas du plan. On en déduit une définition possible du bord à l'infini.

Le bord à l'infini On peut le voir dans n'importe lequel des 3 modèles.

Propriété Les géodésiques de H^3 sont uniquement déterminées par leurs extrémités, qui sont des points distincts dans $\partial_\infty H^3$.

2.2 Les isométries comme transformations projectives complexes

Définition $\mathbf{C}P^1$ comme l'espace projectif sur $\mathbf{C}^2$.

Définition Une transformation projective complexe sur $\mathbf{C}P^1$ est l'application induite sur $\mathbf{C}P^1$ par une application complexe linéaire inversible sur $\mathbf{C}^2$.

NB On a une identification naturelle de $\mathbf{C}P^1$ privé d'un point avec $\mathbf{C}$, par l'application $[z_1, z_2] \mapsto z_1/z_2$. Dans $\mathbf{C}$, les applications projectives complexes agissent par :

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} ,$$

avec $a, b, c, d \in \mathbf{C}$.

Lemme On peut identifier $\mathbf{C}P^1$ avec S^2, avec sa structure conforme usuelle.

Preuve Par définition, $\mathbf{C}P^1 := \mathbf{C}^2/\mathbf{C}^*$, où $\mathbf{C}^*$ agit par multiplication sur les deux facteurs. Or on peut identifier :

$$S^2 := \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \wedge Im(z_2) = 0\} .$$

Or étant donné $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$, il existe un unique $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tel que $Im(z_2/\lambda) = 0$ et que $|z_1/\lambda| + |z_2/\lambda| = 1$, d'où l'identification. Par construction c'est une application complexe de $\mathbf{C}P_1$ sur S^2 munie de sa structure complexe canonique.

Propriété Les transformation projectives complexes agissent sur S^2 en préservant la structure complexe et les cercles. Par contre, ça ne préserve pas du tout la "taille" des cercles.

Preuve Par identification avec $\mathbf{C}$ avec un point à l'infini... L'identification correspond à l'application stéréographique, quand on passe par $[z_1, z_2] \mapsto z_1/z_2$. Il suffit de montrer que l'image réciproque de $\{|z| = 1\}$ est un cercle ou une droite, or un calcul direct permet de l'obtenir.

Exemple Les homothéties sont projectives conformes. De même pour les inversions, i.e. $z \mapsto 1/z$.

Lemme Une transformation complexe bijective de $\mathbf{C}P^1$ dans lui-même est une transformation projective complexe.

Preuve En composant par une transformation projective complexe, on peut se ramener à l'étude d'une transformation complexe u qui fixe 0 et ∞. Posons :

$$v(z) := \frac{1}{u(1/z)} ,$$

alors v fixe encore 0 et ∞ et on a un développement :

$$v(z) = v_1 z + v_2 z^2 + \cdots$$

avec $v_1 \neq 0$ car v est bijective au voisinage de 0. Donc $\lim_0 v(z)/z = v_1$, donc $\lim_0 zu(1/z) = 1/v_1$, donc $\lim_\infty u(z)/z = 1/v_1$. Donc $u(z)/z$ est une fonction holomorphe bornée, donc elle est constante, et donc $u(z) = az$ est une transformation projective complexe.

NB Attention les transformations conformes ne sont pas toujours complexes, c'est vrai ssi elles préservent l'orientation. Sinon elles sont anti-holomorphes.

Remarque On peut identifier le bord à l'infini de H^3 avec $\mathbf{C}P^1 = S^2$ — dans n'importe lequel des 3 modèles : projectif, disque de Poincaré, demi-espace de Poincaré. En effet :

- le bord est muni, dans chacun des modèles, d'une structure conforme, et ces structures conformes sont les mêmes ;
- les isométries agissent en préservant cette structure conforme, c'est clair en particulier dans les modèles de Poincaré.

Lemme Les action sur le bord à l'infini des isométries préservant l'orientation sont exactement les transformations projectives complexes.

Preuve On sait que les actions à l'infini des isométries sont des transformations conformes, complexes si elles préservent l'orientation. Ce sont donc des transformations projectives complexes. Réciproquement on vérifie directement, en utilisant un modèle, que les transformations projectives complexes sont les valeurs au bord des isométries de H^3.

Propriété Une isométrie hyperbolique est uniquement déterminée par l'image de trois points à l'infini.

Preuve C'est une propriété des transformations projectives complexes, on peut considérer l'image des points $0, 1, \infty$. Pour le montrer, on remarque que si on connaît l'image de ces trois points — soit $0 = [0,1], 1 = [1,1], \infty = [1,0]$ — par une matrice 2×2 de déterminant 1, on peut retrouver la matrice.

2.3 Plans géodésiques

Définition Dans le modèle de Poincaré, ce sont les intersections de H^2 avec les plans de dimension 3 contenant 0.

Propriété Dans un plan géodésique P, deux points quelconques sont joints par une unique géodésique qui reste dans P. Toute géodésique dont les extrémités sont dans un plan géodésique est elle-même dans ce plan.

Preuve Par définition dans le modèle de Minkowski.

Propriété Dans le modèle projectif, les plans géodésiques sont les intersections de la boule avec les plans euclidiens.

Propriété Dans le modèle du disque de Poincaré (resp. du demi-espace), les plans géodésiques sont les demi-sphères orthogonales au bord (resp. les demi-sphères ou demi-plans orthogonaux au bord).

Propriété Chaque plan géodésique, muni de sa métrique induite, est isométrique au plan hyperbolique.

2.4 Fonctions de Busemann, horosphères

Définition Fonctions de Buseman : définies comme dans le plan hyperbolique.

Définition Les horosphères sont les surfaces de niveau des fonctions de Busemann.

Propriété Dans le modèle du disque de Poincaré, ce sont les sphères tangentes au bord. Dans le demi-espace de Poincaré, ce sont les plans horizontaux et les sphères tangentes au bord.

Propriété chaque horosphère, munie de sa métrique induite, est isométrique au plan euclidien.

Preuve Dans le demi-espace de Poincaré.

Chapitre 3

Surfaces hyperboliques

Motivations

On voudrait aborder les trois visages de la “théorie de Teichmüller”.

Géométrique. Construction par recollement de polygones.

Algébrique. Approche par les quotients compacts de H^2.

Analytique Par les structures conformes et la recherche de métriques à courbure donnée.

3.1 Les surfaces

Notion de variété Définies comme des sous-variétés de $\mathbf{R}^N$.

Variétés à bord, variétés fermées

Cas particulier des surfaces Classification topologique des surfaces fermées orientées, par leur genre.

Théorème Les surfaces orientées sont classifiées, à difféomorphisme près, par leur genre.

Découpage en pantalons Une manière particulièrement pratique pour construire des surfaces de genre $g \geq 2$, en rapport avec la géométrie hyperbolique.

Définition Pantalons : sphère privée de 3 disques.

Lemme Obtenu par recollement de 2 hexagones le long de 3 de leurs arêtes.

La formule d'Euler

Définition Triangulations des surfaces : décomposer une surface en réunion d'un nombre fini d'images par des difféos de triangles de $\mathbf{R}^2$. On demande que les intérieurs soient disjoints, et que l'intersection de deux arêtes d'images de triangles soit une arête de chacun d'entre eux, ou un sommet. Définition des faces, des arêtes et des sommets d'une triangulation.

Définition Cellulation : comme une triangulation, mais on prend es polygones au lieu de prendre seulement des triangles.

Définition Cellulation plus fine qu'une autre : les faces de la plus fine sont incluses dans les faces de la plus grossière.

Théorème (admis) Etant donné deux cellulations, il existe une triangulation qui est plus fine que chacune d'entre elles.

Définition La caractéristique d'Euler : $\chi = 2 - 2g$.

Exemple 2 pour la sphère, 0 pour le tore, etc.

Théorème Formule d'Euler : $f - a + s = \chi$.

Preuve On montre que $f - a + s$ reste constant lorsque on raffine une triangulation. Or deux triangulations ont une triangulation commune plus fine (admis...). Donc le nombre $f - a + s$ est indépendant de la triangulation. On conclut avec des pantalons et des hexagones.

3.2 La formule de Gauss-Bonnet, le retour

Définition Polygones hyperboliques, comme des polygones (euclidiens) vus dans le modèle projectif.

NB On peut aussi admettre des sommets "idéaux", c'est à dire sur le bord du disque.

Définition Angles extérieurs des polygones : le complémentaire à 2π des angles intérieurs.

Théorème Gauss-Bonnet généralisé aux intérieurs de polygones : la somme des angles extérieurs est égale à $2\pi - A$.

Preuve Découpage en triangles, et on applique la formule de Gauss-Bonnet pour les triangles.

Définition Les surfaces hyperboliques sont des surfaces munies de métriques localement isométriques à la métrique du plan hyperbolique.

Théorème Pour une surface hyperbolique, $A = 2\pi\chi$.

Preuve On choisit un famille de points assez nombreuse, et on remarque que, si les points sont assez proches, il existe des segments qui les joignent. On en déduit une cellulation de la surface dont les arêtes sont des segments géodésiques. On applique la formule de Gauss-Bonnet pour les polygones, on trouve que :

$$A = \sum_f A(f) = \sum_f (2\pi - \pi s(f) + \sum_s \theta(f, s) \ .$$

Mais la somme de tous les angles (intérieurs) est $2\pi s$, donc :

$$A = 2\pi f - \pi \sum_f s(f) + 2\pi s \ .$$

Or $s(f) = a(f)$ et chaque arête est dans deux faces, si bien que :

$$\sum_f s(f) = \sum_f a(f) = 2a \ ,$$

et finalement $A = 2\pi\chi$.

Corollaire Seules les surfaces de genre $g \geq 2$ peuvent admettre une métrique hyperbolique.

3.3 Polygones à angles droit

Définition Polygones réguliers, hexagones réguliers.

Propriété Existence d'un hexagone régulier à angle droit (unique) d'angles égaux à α, pour chaque α compris entre 0 et $2\pi/3$.

Preuve Construction par choix des sommets équirépartis sur un cercle de centre R. On note que l'angle en $R = 0$ est l'angle euclidien, soit $2\pi/3$, alors que l'angle en $R \to \infty$ est nul. Puis par par monotonie et par Gauss-Bonnet.

Corollaire Il existe un hexagone régulier à angles droits.

Proposition Soit d, d' deux géodésiques disjointes de H^2. Il existe un unique couple (x, x'), avec $x \in d$ et $x' \in d'$, qui minimise la distance entre d et d'. La géodésique δ passant par x et x' est orthogonale à d et à d'.

Preuve Existence d'un couple minimisant la distance par argument de compacité. Unicité : preuve possible par convexité de la distance entre deux géodésiques (exercices du chapitre 1). Alternative : on suppose qu'il existe deux tels couples (x, x') et (y, y'). Alors les segments joignant x à x' et y à y' sont disjoints, sinon pas minimisant. Puis contradiction avec Gauss-Bonnet sinon 4-gone à angles droits, impossible.

Définition Longueurs des arêtes d'un hexagones à angles droits : on ne considère en fait que 3 arêtes, qui ne sont pas adjacentes.

Lemme Soit $l_1, l_2, l_3 > 0$. Il existe un unique hexagone à angles droits dont les longueurs des cotés sont les l_i. (Unicité aux isométries hyperboliques près).

Preuve Dessin ! On choisit d'abord une droite d_1 (passant par 0 dans le modèle du disque de Poincaré) puis on fait partir deux droites δ_2 et δ_3, orthogonales à d_1, à distance μ l'une de l'autre. On en fait partir deux autres droites d_2 et d_3, respectivement à distance l_2 et l_3.

On considère alors la droite δ_1 qui minimise la distance entre d_2 et d_3, et on remarque que sa longueur est une fonction monotone de μ, etc.

3.4 Pantalons

Définition Pantalons (topologiques), comme la sphère privée de 3 disques.

Définition Pantalons (hyperboliques), comme pantalons topologiques munis d'une métrique hyperbolique pour laquelle les 3 composantes de bord sont totalement géodésiques.

Propriété En recollant deux hexagones réguliers le long de trois de leurs arêtes (alternées) on obtient un pantalon hyperbolique.

Lemme Considérons un pantalon hyperbolique P, avec $\partial P = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Soit u_1, u_2, u_3 des classes d'homotopies disjointes de courbes joignant C_2 à C_3, etc. Il existe une unique géodésique c_1 dans la classe d'homotopie u_1, orthogonale à C_2 et à C_3, et de même pour les deux autres.

Preuve Existence : on utilise la courbe minimisant la distance entre C_2 et C_3. C'est un segment géodésique, orthogonal aux deux composantes connexes du bord.

Unicité : si deux courbes homotopes joignent une composante connexe à une autre, chacune orthogonale aux deux composantes connexes du bord, alors :
- si les segments sont disjoints, on a une contradiction avec Gauss-Bonnet ;
- sinon, on a un triangle dont la somme des angles est strictement supérieure à π, ce qui contredit aussi Gauss-Bonnet.

Corollaire Les pantalons hyperboliques sont uniquement déterminés par les longueurs des composantes connexes de leur bord, qui peuvent prendre n'importe quelle valeur positive.

NB Il n'y a pas du tout unicité de la décomposition (d'un pantalon en hexagones à angles droits) si on ne fixe pas les classes d'homotopies des courbes de découpage.

Preuve Etant donné un pantalon hyperbolique, on peut le découper en deux hexagones à angles droits, qui sont isométriques car les longueurs de leurs cotés sont égales. On utilise alors le résultat sur les hexagones hyperboliques.

NB On en déduit deux points distingués sur chacune des composantes connexes du bord.

Propriété Chaque classe de difféomorphisme de surfaces orientées est réalisable comme une surface hyperbolique.

Preuve Par recollement d'hexagones à angles droits.

Fin du cours 12/2003

3.5 Découpage des surfaces en pantalons

Remarque Etant donné une surface de genre $g \geq 2$, elle admet au moins une décomposition en pantalons. Chacune de ces décomposition est composée de $2g-2$ pantalons, et donc de $4g-4$ hexagones.

Remarque Soit S une surface de genre $g \geq 2$, munie d'une décomposition topologique en $2g-2$ pantalons, chacun composé (topologiquement) de 2 hexagones. Soit g une métrique hyperbolique sur S, dont la restriction à chaque hexagone en fait un hexagone hyperbolique à angles droits. Pour chaque composante connexe de bord d'un pantalon, on a deux nombres :

- sa longueur, qui est un nombre strictement positif;
- l'angle entre les points marqués correspondants à chacun des cotés (dépendant du choix d'un point marqué pour chaque coté), qui est un élément de S^1.

Théorème Réciproquement, chacune des valeurs possibles est réalisable.

Corollaire L'espace des métriques hyperboliques sur une surface S est une variété de dimension $6g-6$.

Définition Courbes fermées non triviales.

Théorème Dans une surface hyperbolique fermée, chaque courbe fermée non triviale se réalise uniquement comme une géodésique.

Preuve Existence : par minimisation de la longueur dans une classe d'homotopie.

Unicité : on suppose qu'il existe deux géodésiques homotopes. Si elles sont disjointes, on a un cylindre hyperbolique à bord géodésiques. On considère le segment géodésique orthogonal aux composantes de bord (existence par minimisation à nouveau). D'où un 4-gones hyperbolique à angles droits, impossible par Gauss-Bonnet.

Si les géodésiques se rencontrent, on a un ou plusieurs 2-gones, à nouveau impossible par Gauss-Bonnet.

Lemme (admis) Soit S une surface, et soient c_1, c_2 deux courbes fermées simples dans S. Soient c'_1, c'_2 deux courbes fermées simples, homotopes respectivement à c_1 et à c_2. Si c'_1 et c'_2 se rencontrent, l'une des composantes connexes de leur complémentaire est topologiquement un disque.

Corollaire Soit S une surface, munie d'une décomposition topologique en pantalons. Soit g une métrique hyperbolique sur S. Alors S admet une décomposition en pantalons hyperboliques correspondant à la décomposition topologique donnée.

NB Traduction : famille de géodésiques homotopes aux bords des pantalons topologiques donnés, etc.

Preuve On réalise chacune des courbes par une géodésique fermée, et on utilise à nouveau Gauss-Bonnet pour montrer que ces géodésiques sont disjointes (avec le lemme admis).

Conséquence : étant donné une surface S, munie d'une décomposition topologique en pantalons, et des pantalons en hexagones, toutes les métriques hyperboliques sur S sont obtenues par recollement d'hexagones à angles droits comme décrit plus haut.

NB Point délicat : comprendre ce qui se passe quand on augmente les angles de recollement de 2π ! Les métriques hyperboliques obtenues sont les mêmes.

3.6 Le revêtement universel

π_1 des surfaces. Ce qu'on va dire peut s'étendre aux variétés de dimension quelconque. On considère une surface S, munie d'un point distingué x_0. On considère l'ensemble des lacets fermés orientés commençant et finissant en x_0, modulo homothétie, on l'appelle $\pi_1 S$. C'est un groupe, muni de la loi de "composition" qui consiste à faire suivre un lacet par un autre. On l'appelle le *groupe fondamental* de S.

Remarque En général c'est un groupe non commutatif.

Exemple Le groupe fondamental de la sphère est trivial.

Exemple Le groupe fondamental du tore est $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Preuve On utilise la description du tore comme $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. On relève une courbe fermée en une application à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, dont les extrémités ont les mêmes partie fractionnaires. Puis on la déforme en un segment de droite. Donc deux courbes sont homotopes si et seulement si les différences des coordonnées du point de départ et du point d'arrivée sont les mêmes. Il faut encore vérifier que les lois de composition coïncident.

Théorème Le groupe fondamental du tore percé est le groupe libre à deux générateurs.

Preuve On se ramène au groupe fondamental d'un bouquet de 2 cercles.

Théorème Le groupe fondamental d'une surface de genre $g \geq 2$ a une présentation avec $2g$ générateurs, et une seule relation.

NB On va se limiter dans la preuve à la surface de genre 2, et indiquer comment étendre la preuve aux autres cas.

Lemme On peut construire une surface de 2 par recollement des cotés d'un octogone. Les huit sommets sont alors identifiés.

Preuve On part d'un octogone régulier dans le plan, avec identification des faces parallèles avec la même orientation. On note ces faces a, b, c, d.

1. On identifie les cotés notés c, on obtient un cylindre avec, à chaque extrémité, un triangle avec les cotés b, a, d.
2. On identifie les cotés notés a, pour obtenir un tore avec un "trou" qui est un losange de cotés b, d, b^{-1}, d^{-1}.
3. On identifie les cotés notés b pour obtenir un tore avec deux trous, dont les bords sont tous deux notés d.
4. On identifie les cotés notés d pour obtenir une surface de genre 2.

On remarque que les huit sommets de l'octogone sont identifiés en regardant quelles sont les paires de sommets identifiés sur l'octogone.

NB Pour le genre g, il suffit d'appliquer un argument de récurrence, et de montrer que, quand on augmente de 2 le nombre de cotés (i.e. on augmente le genre de 1) on ajoute un "trou" dans la surface obtenue, dont le bord est un losange dont on identifie les cotés 2 à 2, etc.

Preuve du théorème : les 4 paires identifiées de cotés de l'octogone correspondent à des éléments du groupe fondamental de la surface (non triviaux). La relation correspond au fait qu'une boucle qui fait un tour autour de l'origine est homotope à 0.

Réciproque : plus délicat de montrer qu'il n'y a pas d'autre relation, exercice (pas facile).

Exercice Faire la réciproque, en utilisant qu'une surface de genre 2 est la réunion de deux tores percés dont l'intersection est un anneau.

Définition Variétés simplement connexes : ce sont celles dont le groupe fondamental est trivial.

Définition Revêtement de S par S' : une application propre $\phi : S \to S'$ telle que, pour tout $y \in S'$, il existe un voisinage U de y dont l'image réciproque est la réunion disjointe d'ouverts sur lesquels ϕ est un homéomorphisme.

Définition Application associée de $\pi_1(S)$ dans $\pi_1(S')$: on réalise chaque élément de $\pi_1(S)$ comme une courbe fermée, on prend son image dans S' puis la classe correspondante dans $\pi_1(S')$.

Propriété Si $\phi : S \to S'$ est un revêtement, l'application associée entre les groupes fondamentaux est injective.

Théorème Les revêtement de S sont en bijection avec les sous-groupes distingués de $\pi_1(S)$.

Corollaire Chaque surface a un unique revêtement universel, c'est à dire un unique revêtement par une surface simplement connexe, son revêtement universel, noté $\tilde{S}$.

Fin du cours 7/1/2004

Remarque Soit S une surface munie d'une métrique riemannienne g. Le revêtement universel de S est munie canoniquement d'une métrique riemannienne $\tilde{g}$. De plus, $\pi_1(S)$ agit par isométries sur $\tilde{S}$, et le quotient est (S, g).

3.7 Les surfaces hyperboliques comme quotient

Lemme La seule surface hyperbolique complète et simplement connexe est H^2.

Preuve Soit S_0 une surface hyperbolique complète et simplement connexe. Soit $x_0 \in S_0$, on considère l'application exponentielle $\exp_{x_0} : T_{x_0}S_0 \to S_0$. C'est un difféomorphisme local, d'après le comportement des champs de Jacobi le long des géodésiques, car seule la courbure intervenait dans la description du comportement de ces champs.

De plus elle est injective : sinon il existerait deux géodésiques allant de x_0 à un point x, c'est impossible d'après Gauss-Bonnet. Donc $\exp_{x_0}$ est un difféomorphisme global.

On choisit maintenant $x_1 \in H^2$, une isométrie $\phi : T_{x_0}S_0 \to T_{x_1}H^2$, et on définit une application :

$$\psi := \exp_{x_1} \circ \phi \circ \exp_{x_0}^{-1} : S_0 \to H^2 .$$

On remarque que les champs de Jacobi sont envoyés sur les champs de Jacobi — le comportement est le même des deux cotés — et on en déduit que ψ est une isométrie de S_0 sur H^2.

Corollaire Chaque surface hyperbolique est le quotient de H^2 par un sous-groupe discret de $PSL(2, R)$.

Définition Action sans point fixe.

Théorème Soit (S, g) une surface hyperbolique, et soit $\Gamma := \pi_1 S$. Alors $S = H^2/\Gamma$, où Γ agit par isométries, discrètement et sans point fixe.

3.8 Structures conformes sur les surfaces

Structures conformes sur les surfaces

Structures complexes, surfaces de Riemann

Changements conformes de métriques On va voir quelques formules explicites de changement conforme de métrique sur les surfaces.

Lemme Soit g une métrique riemannienne sur une surface S, et soit $\overline{g} = e^{2u}g$. La connexion de Levi-Cività de $\overline{g}$ est :

$$\overline{\nabla}_x y = \nabla_x y + du(x)y + du(y)x - g(x,y)Du \ ,$$

où Du est le gradient de u.

Preuve On utilise la définition de la connexion de Levi-Civitá :

$$2\overline{g}(\overline{\nabla}_x y, z) = x.\overline{g}(y,z) + y.\overline{g}(x,z) - z.\overline{g}(x,y) + \overline{g}([x,y],z) - \overline{g}([x,z],y) - \overline{g}([y,z],x) \ ,$$

si bien que :

$$2e^{2u}g(\overline{\nabla}_x y, z) = e^{2u}g(\nabla_x y, z) + e^{2u}(2du(x)g(y,z) + 2du(y)g(x,z) - 2du(z)g(x,y)) \ ,$$

d'où le résultat.

Remarque Valable aussi en dimension plus grande.

Lemme La courbure $\overline{K}$ de $\overline{g}$ est donnée par :

$$\overline{K} = e^{-2u}(K + \Delta u) \ .$$

(Ici Δ est le Laplacien des géomètres, qui est positif sur L^2).

Preuve On choisit un repère mobile orthonormé sur S, soit (e_1, e_2) ; on utilisera aussi $(f_1, f_2) = (e_1, e_2)$, on utilise deux notations distinctes pour ne pas se perdre dans les antisymétrisations (qui seront par rapport à (e_1, e_2)).

On remarque que $(e^{-u}e_1, e^{-u}e_2)$ est une base orthonormée pour $\overline{g}$, si bien que :

$$\overline{K} = \overline{g}(\overline{\nabla}_{e^{-u}e_1}\overline{\nabla}_{e^{-u}e_2}(e^{-u}f_2) - \overline{\nabla}_{e^{-u}e_2}\overline{\nabla}_{e^{-u}e_1}(e^{-u}f_2) - \overline{\nabla}_{[e^{-u}e_1, e^{-u}e_2]}f_2, f_1) \ ,$$

$$e^{2u}\overline{K} = g(\overline{\nabla}_{e_1}\overline{\nabla}e_2 f_2 - \overline{\nabla}_{e_2}\overline{\nabla}e_1 f_2 - \overline{\nabla}_{[e_1,e_2]}f_2, f_1) \ .$$

On développe suivant le lemme précédent, et on sépare tous les termes qui sont d'ordre 1 en $\nabla_{e_i}e_j$, dont on sait qu'ils disparaitront. Il reste :

1. K, par les termes d'ordre 2 en e_i.
2. les termes d'ordre 2 en u, qui donnent $-g(\nabla_{e_1}Du, f_1) - g(\nabla_{e_2}Du, f_2)$, soit Δu.
3. les termes quadratiques en du, qui se simplifient.

Remarque En dimension plus grande les choses sont plus compliquées !

3.9 Un théorème d'uniformisation

Théorème Soit S une surface compacte de genre $g \geq 2$, et soit g_0 une métrique régulière sur S, et soit K une fonction strictement négative sur S. Il existe un unique métrique g conforme à g_0 dont la courbure est K.

Corollaire Dans chaque classe conforme, il existe une unique métrique hyperbolique.

Lemme Soit u, v deux fonctions sur S. Alors :

$$\int_S \langle D_0 u, D_0 v \rangle da_0 = \int_S (\Delta_0 u) v da_0 \ .$$

En particulier :

$$\int_S \Delta_0 u da_0 = 0 \ .$$

Lemme (inégalité de Trudinger) L'injection $u \mapsto e^{2u}$ de H dans L^2 est compacte.

Preuve Admis ici.

Lemme (inégalité de Poincaré) Il existe une constante $c > 0$ (dépendant de g_0) telle que, pour tout $u \in H'$ (de moyenne nulle) on ait :

$$\|u\|_2^2 \leq c \|D_0 u\|_2^2 \ .$$

Lemme Tout sous-ensemble borné de H est faiblement compact.

Preuve Admis ici. Parce que H est un Hilbert.

Preuve A faire en exercice, un peu délicat. Plus simple : le faire seulement sur le tore (muni de la métrique produit de deux cercles).

Preuve du théorème. On pose $g = e^{2u} g_0$, il faut donc résoudre le problème suivant :

$$\Delta_0 u = K e^{2u} - K_0 \ ,$$

soit (E), où Δ_0 est le Laplacien de g_0 et K_0 est sa courbure.

On va utiliser l'espace $H := W^{1,2}(S, g_0)$, c'est l'espace de Sobolev des fonctions L^2 dont le gradient est L^2. On introduit aussi le sous-espace H' de H des fonctions de moyenne nulle. On introduit deux fonctionnelles :

$$F(u) = \int_S \|D_0 u\|^2 + 2K_0 u da_0, \quad G(u) = \int_S e^{2u} K da_0 \ .$$

On remarque que F est minorée sur H', d'après les deux lemmes plus haut. Soit u une solution de (E), on devrait avoir :

$$G(u) = \int_S K_0 da_0 = 2\pi \chi(S) \ ,$$

si bien qu'on cherche des minima de F sur l'hypersurface $G(u) = 2\pi\chi(S)$. Pour un tel minimum, on doit avoir pour toute fonction $v \in H$:

$$dF_u(v) = \lambda dG_u(v) \ ,$$

soit, par intégration par parties :

$$\int_S (\Delta_0 u + K_0 - \lambda e^{2u} K) v da_0 = 0 \ .$$

Mais par Gauss-Bonnet on devrait donc avoir $\lambda = 1$. Il suffit donc de trouver un mimimum de F avec $G = 2\pi\chi(S)$.

Comme $K < 0$, il existe $a \in H$ telle que $G(a) = 2\pi\chi(S)$. Soit $m := F(a)$, on pose :

$$B := \{u \in H, \ f(u) \leq m \ \wedge \ G(u) = 2\pi\chi(S)\} \ .$$

Alors par construction B est non vide. De plus, F est bornée inférieurement sur B car, pour tout u_inH, on peut écrire $u = \overline{u} + u'$, où $\overline{u}$ est la moyenne de u est $u' \in H'$, et alors $\overline{u}$ est majoré sur B car $G(u) = e^{2\overline{u}} G(u')$ et $|G(u')| \leq \inf |K|$. Comme $F(u) = 4\pi\chi(S) + F(u')$ et F est minorée sur H', on voit que F est minorée sur B.

Il existe donc une suite minimisante (u_n), qui converge vers la borne inf de F sur B.

Or B est borné dans H car, par les mêmes arguments, F est minorée sur H' est $\overline{u}$ est minoré sur B. Donc B est faiblement compact, et (u_n) converge (après extraction d'une sous-suite) vers une limite u_0. Comme G est faiblement continue, $G(u_0) = 0$, et donc, d'après les arguments donnés plus haut, donc u_0 est une solution faible de (E).

En fait u_0 est régulière (régularité elliptique) donc c'est une solition forte de (E).

Unicité : c'est une conséquence du principe du maximum. On suppose qu'il existe deux solutions u_1, u_2 distinctes, et on considère le maximum de $u_1 - u_2$; on constate qu'il ne peut pas être positif, sinon on aurait $K(e^{2u_1} - e^{2u_2})$ qui serait négatif. De même le minimum ne peut pas être négatif.

3.10 L'espace de Teichmüller

Définition L'espace de Teichmüller de genre g, $\mathcal{T}_g$, est l'espace des métriques hyperboliques sur une surface de genre g, modulo les difféomorphismes isotopes à l'identité.

On peut aussi le définir comme l'espace des structures conformes, toujours modulo les difféos isotopes à l'identité.

Théorème $\mathcal{T}_g$ est une boule de dimension $6g - 6$.

Principe de la preuve. On se limite à montrer que cet espace est connexe et simplement connexe.

Soit c_0, c_1 deux éléments de $\mathcal{T}_g$, on les réalise par des métriques g_0, g_1 ; puis on considère le barycentre des deux métriques, qui reste une métrique pour tout

$t \in [0,1]$. On peut donc en prendre la structure conforme, qui se réalise comme une unique métrique hyperbolique, d'où la connexité.

Pour la simple connexité on considère un chemin $(c_t)_{t\in S^1}$ dans $\mathcal{T}_g$, on le réalise comme un chemin de métriques $(g_t)_{t\in[0,2\pi]}$, avec g_0 conforme à une métrique équivalente à $g_{2\pi}$ par une isotopie. Quitte à changer le facteur conforme on peut supposer que ces deux métriques sont isotopes. Quitte à faire agir un "chemin d'isotopies" (cf. la définition des isotopies) on peut supposer que $g_{2\pi} = g_0$. On définit alors un disque dont ce chemin est le bord par une procédure de barycentre, comme pour la connexité ; on note g le barycentre des g_t, puis, pour chaque (r,t), on définit $g_{r,t}$ par barycentre entre g et g_t. Puis on passe encore à des métriques hyperboliques par un changement conforme, et on obtient la simple connexité.

Définition L'*espace des modules* de métriques hyperboliques $\mathcal{M}_g$, sur une surface de genre g, est l'espace des métriques hyperboliques modulo tous les difféomorphismes.

Définition On note $Diff(S)$ le groupe des difféos de S, et $Diff_0(S)$ le groupe des difféos isotopes à l'identité.

Théorème $\mathcal{M}_g = \mathcal{T}_g/\Gamma$, où $\Gamma = Diff(S)/Diff_0(S)$.

Preuve Par construction !

Définition $Diff(S)/Diff_0(S)$ est appelé le *groupe modulaire*.

Remarque Pour une surface de genre quelconque, le groupe modulaire est compliqué ! Mais il est simple pour le tore, dans ce cas c'est $SL(2,\mathbf{Z})$, cf. les exercices.

Remarque On peut aussi considérer les espaces de métriques hyperboliques sur les surfaces à bord, ou sur les surfaces munies de points distingués. Pour les surfaces à bord on se limite en général aux métriques pour lesquelles le bord est géodésique. Pour les métriques avec des points distingués, on considère des métriques hyperboliques complètes sur le complémentaire des points, et d'aire finie.

Exercices

1. L'espace des métriques plates sur le tore . On considère le tore T^2, et deux éléments a, b de son groupe fondamental correspondant à des courbes qui ne se rencontrent qu'un un point.

1.1 Montrer que a et b commutent, et qu'ils engendrent le groupe fondamental du tore.

1.2 On considère une métrique plate g_0 sur le tore. Montrer que le revêtement universel du tore, muni de la métrique provenant de g_0, est le plan euclidien.

1.3 Montrer que, étant donné g_0, on peut associer à a et à b deux vecteurs A et B de $\mathbf{R}^2$, définis modulo une rotation agissant sur les deux vecteurs.

1.4 On considère maintenant les métriques plates sur le tore, aux homothétie près. Montrer que, étant donné a et b, on peut associer à la classe de g_0 (aux homothéties près) un élément du demi-plan supérieur $\mathbf{R}^2$. En déduire que l'espace $\mathcal{M}_1$ des métriques plates sur le tore, modulo les difféomorphismes isotopes à l'identité et les homothéties, est associé bijectivement au demi-plan supérieur.

2. Calculs de groupes fondamentaux. 2.1 Donner le groupe fondamental du tore de dimension n, le produit de n cercles.

2.2 Donner le groupe fondamental d'un bouquet de n cercles, la réunion de n cercles recollés en un point.

Chapitre 4

Introduction aux variétés hyperboliques de dimension 3

Motivations

Définition. Une variété hyperbolique est une variété munie d'une métrique localement isométrique à l'espace hyperbolique.

Propriété Toute variété hyperbolique complète est le quotient de l'espace hyperbolique par un groupe d'isométries qui agit isométriquement.

Un exemple explicite de variété hyperbolique compacte.

Une construction moins explicite mais plus générale.

Explication. C'est difficile de trouver des exemples à cause du théorème de rigidité de Mostow : si une variété hyperbolique admet une métrique hyperbolique, alors elle est unique.

Conditions topologiques.

La conjecture d'hyperbolisation de Thurston.

4.1 Propriétés de base

Définition Une variété hyperbolique (de dim 3) est une variété munie d'une métrique localement isométrique à celle de l'espace hyperbolique (de dim 3).

Théorème Les variétés hyperboliques sont des quotients de H^3 par un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbf{C})$.

4.2 Comment construire des variétés hyperboliques

C'est assez difficile de construire des exemples de variété hyperboliques de dimension 3 fermées ! Deux approches : par une construction géométrique, ou par une construction arithmétique. On va voir un exemple de construction géométrique, il y en a d'autres.

Les dodécaèdres hyperboliques réguliers.

Propriété Les angles dièdres du dodécaèdre régulier (euclidien) sont supérieurs à $2\pi/5$.

Preuve On considère leur link, c'est un triangle sphérique dont les arêtes sont de longueur $3\pi/5$, car les faces ont des angles extérieurs égaux à $\pi/5$ par Gauss-Bonnet. On utilise ensuite la formule de géométrie du triangle sphérique :

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \cos(\alpha)\sin(b)\sin(c) \ .$$

Propriété Les angles dièdres du dodécaèdre régulier idéal (hyperbolique) sont égaux à $\pi/3$.

Preuve On considère leur link, i.e. l'intersection d'un voisinage d'un sommet avec l'horosphère correspondante, qui est un plan euclidien. C'est un triangle équilatéral, donc ses angles sont égaux à $\pi/3$.

Corollaire Il existe un dodécaèdre régulier hyperbolique dont les angles dièdres sont égaux à $2\pi/5$.

Propriété Il existe un recollement des faces (opposées) de ce polyèdre qui conduit à une variété hyperbolique fermée.

Principe de la construction : On doit regrouper les arêtes en 6 groupes de 5, de manière que l'angle total soit 2π. Il suit nécessairement que l'objet recollé est une variété, considérer pour cela le link d'un sommet.

4.3 Conditions topologiques, la conjecture d'hyperbolisation

Surfaces minimales

Définition Ce sont les surfaces dont la courbure moyenne est nulle.

Propriété La métrique induite sur une surface minimale dans une variété hyperbolique est à courbure $K \leq -1$.

Corollaire Une surface minimale ne peut être ni une sphère, ni un tore.

Propriété Une surface qui minimise son aire parmi les surfaces qui lui sont homotopes est minimale.

Preuve On calcule la variation première de l'aire lors d'une déformation normale de la surface, on trouve que c'est proportionnel à fH, où f est l'ampleur de la déformation et H est la courbure moyenne.

Théorème Dans toute classe non triviale d'homotopie de surfaces, dans une variété de dimension 3, il en existe une qui est minimale.

NB C'est un résultat délicat, admis ici. C'est vrai en dimension au plus 7.

Tores incompressibles.

Exemple Somme connexe de deux variétés ; exemple du tore de dimension 3, qui contient des tores pas incompressibles.

Corollaire Dans une variété hyperbolique de dimension 3, toute sphère doit border une boule, et tout tore doit être "compressible".

Exemple Somme connexe de deux variétés ; exemple du tore de dimension 3, qui contient des tores pas incompressibles.

Décompositions de variétés. Existence d'une unique décomposition d'une variété de dimension 3 fermée en somme connexe de variétés irréductibles et de $S^1 \times S^2$.

4.4 Les principaux énoncés

Théorème Si une variété fermée de dimension $n \geq 3$ admet une métrique hyperbolique, elle est unique.

NB Contraste avec la dim 2, et aussi avec les métriques plates. Valable aussi pour les métriques hyperboliques de volume fini.

Conjecture : Une variété fermée de dim 3, irréductible et atoroidale, admet une métrique hyperbolique.

NB Cas particulier d'une conjecture plus générale, de "géométrisation" des variétés irréductibles de dimension 3.