Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Algèbre 3

Feuille d'exercices 1

1. Soient G un groupe et $G' := [G, G]$ le sous-groupe engendré par les commutateurs $a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}$. G' s'appelle le groupe dérivé de G.

(a) Démontrer que le groupe dérivé G' est un sous-groupe normal de G et le groupe quotient $\bar{G} := G/[G, G]$ est un groupe abélien.

(b) Soit $\nu : G \to G/[G, G]$ le homomorphisme canonique. Soient H un groupe abélien est $\psi : G \to H$ un morphisme de groupe. Démontrer qu'il existe un et un seul morphisme $\bar{\psi} : \bar{G} \to H$ tel que $\psi = \bar{\psi} \circ \nu$.

2. Soit $\phi : G \to K$ un homomorphisme de groupes. Démontrer que

(a) $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$,

(b) $\ker \phi$ est un sous-groupe normal de G,

(c) on a $\quad G/\ker \phi \cong \mathrm{im}\phi$.

3. Soit $\phi : G \to K$ un homomorphisme surjectif de groupes. Soit $N = \ker \phi$ le noyau de ϕ.

(a) Soit H un sous-groupe de G. Démontrer que $\phi(H)$ est un sous-groupe de K.

(b) Soit H un sous-groupe normale de G. Démontrer que $\phi(H)$ est un sous-groupe normale de K.

(c) Soit H un sous-groupe de K. Démontrer que $\phi^{-1}(H)$ est un sous-groupe de G, qui a N comme sous-groupe.

(d) Soit H un sous-groupe normale de K. Démontrer que $\phi^{-1}(H)$ est un sous-groupe normale de G, qui a N comme sous-groupe.

(e) Démontrer que $H \to \phi(H)$ donne une bijection entre l'ensemble des sous-groupes H de G qui ont N comme sous-groupe et l'ensemble des sous-groupe de K. Cette bijection respect la propriété d'être normal.

4. Soit G le sous-ensemble de matrices de type 3×3 sur $\mathbb{R}$:

$$G := \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

(a) Démontrer que G est un sous-groupe non-abélien de $\mathrm{Gl}(3, \mathbb{R})$.

(b) Déterminer le centre $C(G)$ de G.

(c) Déterminer le groupe dérivé $G' = [G, G]$ et vérifier que $C(G) = G'$. Alors G' et G/G' sont abéliens, mais G n'est pas.

5. Soit G un groupe et $C(G)$ le centre de G. Si $G/C(G)$ est cyclique, démontrer que G est abélien (donc égal à C(G)).

6. Soit G un groupe de transformation de M. Soit

$$H := \{h \in G \mid h.x = x, \ \forall x \in M\}.$$

(a) Démontrer que H est un sous-groupe normale de G.

(b) Démontrer que le groupe quotient G/H opère effectivement sur M par

$$G/H \times M \to M, \qquad (\bar{g}, x) \mapsto g.x.$$

7. Soit G un groupe de transformation de M. Soit $N \subseteq M$ un sous-ensemble. On fait la définition

$$Stab_G(N) := \{g \in G \mid g.N \subseteq N \text{ et } g^{-1}.N \subseteq N\}.$$

(a) Démontrer que $Stab_G(N)$ est un sous-groupe de G.

(b) La condition $g^{-1}.N \subseteq N$ est-elle toujours nécessaire?

Les pages de web du cours: `http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours/algebre`