Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Algèbre

Feuille d'exercices 2

1. (a) Soit G un groupe fini qui a précis deux classes de conjuguées des éléments. Démontrer que $G \cong \mathbb{Z}_2$.
(b) Soit $m \in \mathbb{N}$ et G un groupe. Soit U le seul sous-groupe d'ordre m. À quelle condition est-ce que U est un sous-groupe normal?

2. Soit D_n $(n \geq 3)$ le sous-groupe des isometries de polygone régulaire d'ordre n (c.à.d. le polygone a n sommets et il est le plus symétrique).
(a) Vérifier que $\#D_n = 2n$.
(b) Trouver une description de D_n avec des générateurs a, d et des relations

$$a^n = d^2, \qquad dad^{-1} = a^{-1}.$$

(c) Démontrer que $a^2 \in [D_n, D_n]$. ($[D_n, D_n]$ *est le sous-groupe commutateur.*)
(d) Pour n pair démontrer que $[D_n, D_n]$ est cyclique d'ordre $n/2$.
(e) Pour n impair démontrer que $[D_n, D_n]$ est cyclique d'ordre n.

3. Démontrer que tout groupe non-abélien d'ordre p^3 a un centre d'ordre p.

4. Soit G un groupe fini tel que $\#G = p^n q$, $p, q \in \mathbb{P}$ et $p > q$. Démontrer que G est n'est pas simple (c.à.d. G a de sous-groupes normals qui sont non-trivial). *On utilise le théorème de Sylow.*

5. Soit G un groupe fini tel que $\#G = pqr$, $p, q, r \in \mathbb{P}$ qui sont distincts. Démontrer que G est n'est pas simple. *On utilise le théorème de Sylow.*

6. Dans le cours on va démontrer que les groupe G tel que $\#G = p^2q$, $p, q \in \mathbb{P}$ et $p < q$ ne sont pas simple.
C'est à vous d'écrire toute possible ordre pour un groupe G d'ordre $\#G < 60$ comme un produit des nombres premiers.
Éliminer ces ordres pour lesquelles le groupes ne sont pas simple par des arguments généraux (voir p.e. Ex. 4, Ex. 5, et les résultats de cours).
Éliminer aussi ces ordres pour lesquelles le groupes sont trivialement simple.

7. Vérifier que les groupes G d'ordre 40 ou 56 ne sont pas simple. *On peut utiliser le théorème de Sylow.*

Les pages de web du cours:
`http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours/algebre`