Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Algèbre

Feuille d'exercices 3

1. Le but de cet exercice est de démontrer que le groupe alterné A_n est simple pour $n \geq 5$. Pour le suivant soit toujours $n \geq 5$.
(a) Soit $\sigma \in S_n$ une permutation. Montrer que la conjugaison par un élément $\pi \in S_n$ correspond exactement à un "relabelling" des nombres. Par exemple, soit $\sigma := (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ un cycle. Alors $\pi \cdot \sigma \cdot \pi^{-1} = (\pi(i_1), \pi(i_2), \ldots, \pi(i_k))$.
(b) Montrer que le sous-groupe A_n de S_n est engendré par des cycles de longueur 3. (Par définition A_n est l'ensemble des celles permutations qui sont un produit des nombres pair des transpositions.)
(c) Soit N un sous-groupe normal de A_n appartenant un cycle de longueur 3. Montrer que $N = A_n$.
(d) Soit N un sous-groupe normal de A_n et $\sigma \in N$. Démontrer que le commutateur de σ avec un élément arbitraire π de A_n

$$[\sigma, \pi] := \sigma\pi\sigma^{-1}\pi^{-1}$$

est un élément de N.
(e) Soit $\pi \in A_n$. Montrer qu'il existe toujours un cycle σ de longueur 3, tel que $[\sigma, \pi]$ change au plus 6 éléments.
(f) Soit $\pi \in A_n$, tel que π change exactement 4 ou 6 éléments. Alors il existe toujours un cycle σ de longueur 3, tel que $[\sigma, \pi]$ est un cycle de longueur 3 ou 5.
(g) Soit $\pi \in A_n$, tel que π change exactement 5 éléments. Alors il existe toujours un cycle σ de longueur 3, tel que $[\sigma, \pi]$ est un cycle de longueur 3.
(h) Utiliser maintenant (d) – (g) pour vérifier que un sous-groupe normal $N \neq \{1\}$ appartenant un cycle de longueur 3. En utilisant (c) on obtient que $N = A_n$. Alors A_n est simple.

2. Soit G un groupe. Soit $Aut(G)$ l'ensemble des automorphismes $\phi : G \to G$ des groupes. C.à.d. que ϕ est un morphisme qui est bijectif. Démontrer que $Aut(G)$ est un groupe lui-même avec la composition comme produit.
Pour $g \in G$ soit $\phi_g : G \to G$ l'application de conjugaison, i.e.

$$\phi_g : G \to G, \qquad h \mapsto \phi_g(h) = g \cdot h \cdot g^{-1}.$$

Vérifier que ϕ_g est un élément de $Aut(G)$.
Vérifier que

$$\psi \circ \phi_g \circ \psi^{-1} = \phi_{\psi(g)}.$$

Vérifier que $Inn(G) := \{\phi_g \mid g \in G\}$ est un sous-groupe normal de $Aut(G)$. Ce sous-groupe est appelé le groupe des automorphismes intérieurs.
Démontrer que

$$\phi : G \to Aut(G), \qquad g \mapsto \phi_g$$

est un morphisme de groupes. Déterminer le noyau de ϕ.

3. Soient H et N deux groupes et $\phi : H \to Aut(N)$ un morphisme de groupes. Pour les éléments de produit cartésien $H \times N$ on fait la définition suivante pour une multiplication

$$(h_1, n_1) \cdot (h_2, n_2) := (h_1 h_2, \phi(h_2^{-1})(n_1) n_2).$$

Démontrer que
(a) L'opération donne la structure de groupe $\tilde{G}$ sur $H \times N$. ($\tilde{G}$ est appelé le produit semi-direct de H et N.)
(b) $H \cong \tilde{H} := \{(h, 1) \mid h \in H\}$ est un sous-groupe de $\tilde{G}$.
(c) $N \cong \tilde{N} := \{(1, n) \mid n \in N\}$ est un sous-groupe normal de $\tilde{G}$.
(d) $\tilde{G} = \tilde{H} \cdot \tilde{N}$ et $\tilde{H} \cap \tilde{N} = \{1\}$, $\tilde{G}/\tilde{N} \cong \tilde{H}$.
(e) $\tilde{H}$ est un sous-groupe normal sii $\phi(h) = id_N$ pour chaque $h \in H$. (Dans ce cas on appelle $\tilde{G}$ le produit direct.)
(f) Montrer que S_3 est un produit semi-direct.

4. Soient G un groupe. Un sous-groupe H est appelé *sous-groupe caractéristique* sii $\phi(H) = H$ pour tout automorphisme ϕ de G.
(a) Montrer que tout sous-groupe caractéristique et un sous-groupe normale.
(b) Montrer que le centre $C(G)$ et le sous-groupe dérivé $G' = [G, G]$ sont des sous-groupes caractéristiques.
(c) Soient H un sous-groupe normale de G et C un sous-groupe caractéristique de H. Monter que C est un sous-groupe normale de G.
(d) Soit $G = \mathbb{Z}_{/2} \times \mathbb{Z}_{/2}$ qui est abélien (de sort que tous ses sous-groupes sont normales). Mais, montrer que $\{1\}$ et G sont les seuls sous-groupes caractéristiques. Alors il existe de sous-groupe normal non-caractéristique.

5. Pour les suivants soient tous les groupes abeliens. Soit C_k le groupe cyclique d'ordre k.
(a) Soit G un groupe. Vérifier que

$$T(G) := \{a \in G \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 1\}$$

est un sous-groupe.
(b) Soit $gcd(k, l) = 1$. Démontrer que $C_k \times C_l = C_{kl}$.
(c) Démontrer que $C_k \times C_k$ n'est pas cyclique.
(d) Donner pour $gcd(k, l) = d$ le type de décomposition de $C_k \times C_l$.
(e) Déterminer pour des groupes abeliens avec de nombre d'éléments $= 30$, 36, 48, 57, 27, etc. les types des isomorphie.

6. Soit G un groupe abelien d'ordre N. Démontrer que G est cyclique sii G admet pour chaque diviseur M de N un et un seul sous-groupe H d'ordre M.

Les pages de web du cours:
`http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours/algebre`