Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Algèbre

Feuille d'exercices 4

1. Soient R un anneau commutatif est 1 l'élément neutre de la multiplication. Soit S un sous-ensemble de R tel que

(1) $1 \in S$,
(2) $\forall a, b \in S : ab \in S$.

L'ensemble S est appelé un *ensemble multiplicatif.*
On fait la définition sur $R \times S$

$$(r, s) \sim (r', s') \text{ sii il existe } t \in S \text{ tel que } \ t(rs' - r's) = 0.$$

(a) Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

On écrit $S^{-1}R$ pour l'ensemble des classes d'équivalence et on note la classe de couple (r, s) comme $\frac{r}{s}$. On introduit

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} := \frac{rs' + r's}{ss'}, \qquad \frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} := \frac{rr'}{ss'}.$$

et on donne une application

$$i_S : R \to S^{-1}R, \qquad r \mapsto \frac{r}{1}.$$

(b) Montrer que les opérations $+$ et $\cdot$ sont bien définies.
(c) Montrer que $(S^{-1}R, +, \cdot)$ est un anneau.
(d) Montrer que i_S est un morphisme d'anneau.
(e) Démontrer que les éléments dans $i_S(S)$ sont inversible.
(f) Déterminer $\ker i_S$.

2. Soit R un anneau (commutatif) intègre, c.á.d. que R n'a pas de diviseur de zéro. Prendre comme ensemble multiplicatif $S = R \setminus \{0\}$.
(a) Démontrer que S est un ensemble multiplicatif.
(b) Montrer que $S^{-1}R$ est un corps.
(c) Quelle sont les résultats pour $R = \mathbb{Z}$ est pour $R = \mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes sur le corps $\mathbb{K}$.

3. Soit R un anneau (commutatif) et P un idéal premier.
(a) Démontrer que $S \setminus P$ est un ensemble multiplicatif. (L'anneau $S^{-1}R$ est appelé l'anneau local de R au point P.)
(b) Faire cette construction pour $R = \mathbb{Z}$ et $P = (p)$ avec p un nombre premier.

4. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Démontrer que $\mathbb{K}$ admet toujours un sous-corps qui est isomorphe à $\mathbb{Q}$ (si le caractéristique de $\mathbb{K}$ est zéro) ou isomorphe à $\mathbb{F}_p$ (si le caractéristique de $\mathbb{K}$ est égal à p). Ici $\mathbb{F}_p$ est le corps avec p éléments. (Regarder le sous-corps engendré par l'élément 1).
Soit $\phi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ un morphisme de corps. Démontrer que ϕ laisse fixe les éléments de $\mathbb{Q}$ resp. de $\mathbb{F}_p$.

5. (a) Dire quels sont ceux des nombres complexes suivants qui sont algébriques ou transcendants sur le corps $\mathbb{Q}$ et donner les raisons:

$$\sqrt{7}, \quad \sqrt[3]{5}, \quad \pi^2, \quad e+3, \quad \mathrm{i}+3, \quad \sqrt{2}+\mathrm{i}.$$

(On peut utiliser que e et π sont transcendantes.)
(b) Montrer que, si x est algébrique (sur un corps $\mathbb{K}$), il en est de même de x^2 et $x+3$, et réciproquement.
(c) Quels sont les nombres de $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ qui engendrent le corps tout entier?

6. (a) Dans $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ exprimer $1/(1+\sqrt{3})$ comme combinaison $\mathbb{Q}$-linéaires des éléments $1, \sqrt{3}$.
(b) Dans l'extension simple $\mathbb{Q}(u)$ engendrée par une racine u de

$$u^3 - 6u^2 + 9u + 3 = 0,$$

exprimer chacun des éléments suivants comme combinaison $\mathbb{Q}$-linéaires des éléments $1, u, u^2$

$$u^4, \quad u^5, \quad 3u^5 - u^4 + 2, \quad 1/(u+1), \quad 1/(u^2 - 6u + 8).$$

Les pages de web du cours:
`http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours/algebre`