Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Algèbre

Feuille d'exercices 5

1. Soit $d \in \mathbb{Z}$ un nombre sans facteur quadratiques. Soit $f(X) = X^3 - d$ et $\mathbb{L}$ le corps de racines de f. Donner une description de ce corps. Déterminer G le groupe de Galois de f sur $\mathbb{Q}$ et les représentation par les permutations des racines de f. Déterminer les sous-groupe de G et les sous-corps qui correspondent a ces sous-groupes (c.à.d. le sous-corps des éléments qui sont fixés par les éléments du sous-groupe).

2. Examiner si les polynômes suivants factorisent sur $\mathbb{Z}[X]$:

$$3X^2 - 7X - 5, \qquad 6X^3 - 3X - 18, \qquad X^3 - 7X + 1.$$

3. Soit $\mathbb{K}[X]$ l'anneau de polynômes sur $\mathbb{K}$. La dérivée formelle est introduit comme application $D(X^n) = nX^{n-1}$ avec l'extension linéaire pour tout polynôme, i.e.

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad \mapsto \quad D(f) = \sum_{i=0}^{n} i a_i X^{i-1}.$$

(a) Vérifier que

$$D(f+g) = D(f) + D(g), \quad D(\alpha f) = \alpha D(f),\ \alpha \in \mathbb{K},$$
$$D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g), \qquad D(g^2) = 2gD(g).$$

(b) Un polynôme est sans des carrés s'il n'existe pas un polynôme g de degré ≥ 1 tel que g^2 est un diviseur de f. Montrer que $gcd(f, D(f)) = 1$ entraine que f est sans des carrés.
(c) Montrer que si α est une racine double de f alors α est aussi une racine de $D(f)$.

4. Déterminer le degré de chacune des extensions multiples suivantes du corps $\mathbb{Q}$. Justifier la réponse

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \mathrm{i}), \qquad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{-2}),$$
$$\mathbb{Q}(\sqrt[2]{18}, \sqrt[4]{2}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt[2]{8}, 3+\sqrt{50}),$$
$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, u), \quad \text{avec } u^4 + 6u + 2 = 0,$$
$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-5}, \sqrt{7}), \qquad \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2}).$$

5. Trouver les degrés des corps de racines des polynômes suivants sur $\mathbb{Q}$:

$$X^3 - X^2 - X - 2, \qquad X^3 - 2,$$
$$X^4 - 7, \qquad (X^2 - 2)(X^2 - 5).$$

6. Si ζ est une racine primitive n^{ieme} de l'unité, démontrer que le groupe Galois de $\mathbb{Q}(\zeta)$ est abélien (tout automorphisme est de la forme $\zeta \to \zeta^c$).

7. (a) Soit $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\omega)$ le corps engendré par une racine cubique complexe ω de l'unité. Étudier le groupe de Galois de $X^3 - 2$ sur $\mathbb{L}$: Donner le degré du corps de racine, décrire le groupe de Galois en langage de théorie des groupes, et donner une représentation de chaque automorphisme par une permutation des racines.
(b) Même question pour $X^5 - 7$ sur $\mathbb{Q}(\zeta)$, ζ étant une racine cinquième primitive de l'unité.

8. (a) Soit $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{Q}$, démontrer que tout automorphisme de $\mathbb{L}$ laisse fixe chaque élément de $\mathbb{Q}$.
(b) Énoncer et démontrer un résultat analogue pour un corps de caractéristique p

Les pages de web du cours:
`http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours/algebre`