Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Algèbre

Feuille d'exercices 6

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p.
(a) Démontrer que

$$\binom{p}{k} \cdot 1 = 0, \qquad 1 \leq k \leq p-1.$$

(b) Démontrer que $\mathbb{K} \to \mathbb{K}; a \mapsto a^p$ est un endomorphisme de corps.
(c) Démontrer que pour $\mathbb{F}_p$ le seule endomorphisme est l'identité.

2. Soit $\mathbb{F}_p(t)$ le corps de expressions rationnelles d'une variable transcendante t. On peux utiliser que le polynôme $f(X) = X^p - t$ est irréductible. Vérifier que le polynôme est inséparable. Vérifier que le groupe de Galois de f sur $\mathbb{F}_p(t)$ est trivial. Quel est le degré de corps de racines de f sur $\mathbb{F}_p(t)$.

3. Soit f un polynôme de degré n a n racines $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sur $\mathbb{K}$. Son discriminant est défini comme

$$D := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2.$$

(a) Montrer que le discriminant d'un polynôme à coefficients rationnels est un nombre rationnel. (On peut utiliser le groupe Galois G de polynôme f. Quels sont les éléments qui sont fixés par G.)
(b) Il est bien connu que le groupe Galois G de f est un sous-groupe de permutation de racines, c.a.d. un sous-groupe de S_n (S_n est le groupe symétrique). On regard maintenant l'élément

$$\sqrt{D} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

dans le corps de racines. Démontrer que $\sigma(\sqrt{D}) = \pm\sqrt{D}$ pour $\sigma \in G$. Démontrer que $G \leq A_n$ sii $\sigma(\sqrt{D}) \in \mathbb{K}$. ($A_n$ est le groupe alterné.)

(c) Calculer $\sqrt{D}$ pour le polynôme $f(X) = X^3 - 5$ sur $\mathbb{Q}$. Vérifier encore le résultat sur le groupe Galois de f.

4. Décrire en détail la correspondance sous-groupe-sous-corps pour le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \mathrm{i})$.

5. Décrire en détail la correspondance sous-groupe-sous-corps pour le corps de racines de $X^4 - 3$ sur $\mathbb{Q}$.

6. Si $\mathbb{L}$ est une extension finie d'un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 0, démontrer que le nombre de corps compris entre $\mathbb{L}$ et $\mathbb{K}$ est fini.

7. On fixe p un nombre premier et $q = p^r$, $r \in \mathbb{N}$, $r \neq 0$. Soit donné sur $\mathbb{F}_p$ le polynôme

$$f(X) = X^q - X.$$

Soit $\mathbb{L}$ un corps tel que sur $\mathbb{L}$ le polynôme f est un produit des facteurs linéaires. Soit

$$E := \{\alpha \in \mathbb{L} \mid f(\alpha) = 0\},$$

i.e. E est ensemble de racine de f.
(a) Démontrer que E est une extension de corps sur $\mathbb{F}_p$.
(b) Démontrer que E est le corps de racines de f. (Attention: en général dans le corps de racines d'un polynôme g on trouve aussi des éléments qui ne sont pas des racines de g.)
(c) Calculer le nombre des éléments dans E. (Il faut exclure que f a des facteurs quadratiques.)
(d) Démontrer que si a une extension de corps E' sur $\mathbb{F}_p$ ayant p^r éléments, E' est le corps de racines de f. (En utilisant que deux corps de racines du même polynôme sont isomorphe on peut conclure qu'il existe un et un seul corps avec p^r éléments.)

Les pages de web du cours:
`http://math.uni.lu/schlichenmaier/cours/algebre`