

Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire

Feuille d'exercices 1

1. Soit M un ensemble et soient A et B sous-ensemble de M . On dénote le complément de A dans M par $C_M(A)$. Vérifier que

$$C_M(A \cup B) = C_M(A) \cap C_M(B), \quad C_M(A \cap B) = C_M(A) \cup C_M(B).$$

2. Soit G un ensemble avec une loi interne \circ qui est associative. Démontrer que

- (a) L'élément neutre est unique s'il existe.
- (b) Le symétrique de $g \in G$ est unique s'il existe.

3. Soit (G, \circ) un groupe. Démontrer que un sous-ensemble H de G est un sous-groupe si et seulement si

$$(1) \quad H \neq \emptyset, \quad (2) \quad \forall a, b \in H : a \circ b \in H, \quad (3) \quad \forall a \in H : a^{-1} \in H.$$

Démontrer que les condition (2) et (3) sont équivalentes à la seule condition:

$$\forall a, b \in H : a \circ b^{-1} \in H.$$

4. Soit \mathbb{K} un corps. Soit \mathbb{K}^n le produit cartésien avec n facteurs. Dans le cours nous avons introduit une addition $+$ entre les éléments du \mathbb{K}^n , et une multiplication \cdot entre les éléments du \mathbb{K} et les éléments du \mathbb{K}^n . Vérifier en détail, que $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel. Rappel:

$$\begin{aligned} x, y &\in \mathbb{K}^n, \quad \alpha \in \mathbb{K} \\ x &= (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad x_i, y_i \in \mathbb{K}, \\ x + y &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ \alpha \cdot x &:= (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n). \end{aligned}$$

5. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 ? Si oui, pourquoi? Si non, pourquoi?

$$V_1 := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = c + d\}$$

$$V_2 := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = 1\}$$

$$V_3 := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 = b, c = 0, d = 0\}$$

$$V_4 := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 = 0\}$$

$$V_5 := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 = 1\}$$

$$V_6 := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 = -1\}$$

$$V_7 := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a \cdot b = 0\}$$

$$V_8 := \{(a + 2b, a, 2a - b, b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$V_9 := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = 0\}$$

6. Soit V un espace vectoriel (sur \mathbb{K}). Montrer que un sous-ensemble W est un sous-espace vectoriels si est seulement si

- (1) W est non-vide ($W \neq \emptyset$),
- (2) $\forall x, y \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ a } \alpha x + \beta y \in W$.

7. Soient a, b deux nombres réels, I l'intervalle réel $]a, b[$ entre $a, b \in \mathbb{R}$ et $C^1(I)$ l'ensemble des applications $I \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont différentiables. Montrer que $C^1(I)$ est un sous-espace vectoriel de $App(I, \mathbb{R})$.

8. Soit \mathbb{F}_2 l'ensemble qui comporte deux éléments $\bar{0}$ et $\bar{1}$, $\mathbb{F}_2 := \{\bar{0}, \bar{1}\}$. On donne les lois internes $+$ et \cdot comme

$$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}, \quad \bar{1} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{1} = \bar{1}, \quad \bar{1} + \bar{1} = \bar{0},$$

et

$$\bar{0} \cdot \bar{0} = \bar{0}, \quad \bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{0} \cdot \bar{1} = \bar{0}, \quad \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}.$$

Montrer que \mathbb{F}_2 avec $+$ et \cdot est un corps.

Les pages de web du cours: <http://www.cu.lu/~schliche/cours-geo>