

Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire

Feuille d'exercices 1a pour les mathématicien

- 1.** Soit \mathbb{F}_{23} le corps avec 23 éléments. Déterminer pour $\tilde{5} = 5 \bmod 23$ son élément symétrique en utilisant l'algorithme de Euclid (i.e. par écrire $\text{pgcd}(n, m)$ comme une combinaison linéaire de n et m).
- 2.** (a) Soit $a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ la présentation de nombre a comme un nombre décimal. Montrer que $3|a$ si et seulement si $3|(\sum_{i=1}^n a_i)$. (On peut utiliser le calcul de résidus.)
(b) Trouver une règle correspondante pour la divisibilité par 9.
- 3.** Trouver tous groupes d'ordre inférieur ou égale 5 (c.à. d. tous groupes qui ont au plus 5 éléments.) Sont-ils abéliens? (Bien sûr il est seulement possible de déterminer le type d'isomorphie des groupes.)
- 4.** Soit S_3 le groupe des applications bijectives de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{1, 2, 3\}$. Donner tous les éléments de ce groupe. Calculer l'ordre des éléments et trouver tous sous-groupes de S_3 . Est-ce que le groupe est abélien?
- 5.** Soient G un groupe et H un sous-groupe.
 - (1) On fait la définition: $g_1 \sim g_2$ si et seulement si il existe $h \in H$ tel que $g_2 = g_1 \cdot h$. Montrer que \sim est une relation d'équivalence.
 - (2) Si G est abélien, montrer que l'ensemble quotient $G/H := G/\sim$ est un groupe si on pose

$$\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_2 := \overline{g_1 \cdot g_2}.$$

Les pages de web du cours: <http://www.cu.lu/~schliche/cours-geo>