

Martin Schlichenmaier  
Université du Luxembourg

## Géométrie et Algèbre Linéaire

### Feuille d'exercices 1a pour les mathématicien

1. Soit  $\mathbb{F}_{23}$  le corps avec 23 éléments. Déterminer pour  $\bar{5} = 5 \bmod 23$  son élément symétrique en utilisant l'algorithme de Euclid (i.e. par écrire  $\gcd(n, m)$  comme une combinaison linéaire de  $n$  et  $m$ ).
2. (a) Soit  $a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$  la présentation de nombre  $a$  comme un nombre décimal. Montrer que  $3|a$  si et seulement si  $3|(\sum_{i=1}^n a_i)$ . (On peut utiliser le calcul de résidues.)  
(b) Trouver une règle correspondante pour la divisibilité par 9.
3. Trouver tous groupe d'ordre inférieur ou égale 5 (c.à. d. tous groupes qui ont au plus 5 éléments.) Sont-ils abéliens? (Bien sur il est seulement possible de déterminer le type d'isomorphie des groupes.)
4. Soit  $S_3$  le groupe des applications bijectives de  $\{1, 2, 3\}$  dans  $\{1, 2, 3\}$ . Donner tous les éléments de ce groupe. Calculer l'ordre des éléments et trouver tous sous-groupes de  $S_3$ . Est-ce que le groupe est abélien?
5. Soient  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe.  
(1) On fait la définition:  $g_1 \sim g_2$  si et seulement si il existe  $h \in H$  tel que  $g_2 = g_1 \cdot h$ . Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence.  
(2) Si  $G$  est abélien, montrer que l'ensemble quotient  $G/H := G/\sim$  est un groupe si on pose

$$\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_2 := \overline{g_1 \cdot g_2}.$$

Les pages de web du cours: <http://www.cu.lu/~schliche/cours-geo>