Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire 2

Feuille d'exercices 1

1. (a) **En utilisant l'algorithme de Gauss** déterminer l'ensemble des solutions (sur $\mathbb{R}$) du système d'équations linéaires

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \end{array} \quad .$$

(b) **En utilisant l'algorithme de Gauss** déterminer les valeurs de α pour lesquelles le système (sur $\mathbb{R}$)

$$\begin{array}{rcrcrcc} x & + & 2y & + & 4z & = & -1 \\ x & - & \alpha y & + & \alpha^2 z & = & \alpha + 1 \\ 2x & + & \alpha y & + & 2\alpha z & = & 2 \end{array} \quad ,$$

(i) a une solution unique; (ii) n'a pas de solution; (iii) a une infinité de solutions. *Attention: Le calcul des solution n'est pas demandé.*

2. (a) Soient A une matrice de type $m \times n$, P une matrice de type $n \times n$ qui est inversible, et Q une matrice de type $m \times m$ qui est inversible. Démontrer que

$$\text{rg }(A) = \text{rg }(QA) = \text{rg }(AP) = \text{rg }(QAP).$$

(b) Soient A une matrice de type $n \times n$, P une matrice de type $n \times n$ qui est inversible, et soit $\text{tr }(A)$ la trace de la matrice A (la somme des termes de la diagonale de A). Démontrer que

$$\text{tr }(P^{-1}AP) = \text{tr }(A).$$

On peut utiliser que on a $\text{tr }(AB) = \text{tr }(BA)$.

3. (a) Soient A, B deux matrices de type $n \times n$. On dit que B est semblable à la matrice A, sii il existe une matrice P de type $n \times n$ qui est inversible telle que on a $B = P^{-1}AP$. On note $B \sim A$. Démontrer que d'être diagonalisable $(\sim)$ est une relation d'équivalence.
(b) Soit $Cl(A)$ la classe d'équivalence de A. Démontrer que pour B et $B' \in Cl(A)$ on a nécessairement

$$\text{rg }(B) = \text{rg }(B'), \qquad \text{tr }(B) = \text{tr }(B').$$

Est-ce que ces conditions sont aussi suffisantes?

4. Est-ce que les couples des matrices suivantes sont semblable?
(a)
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
(b)
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
(c)
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. (a) Soit R_α la rotation avec l'angle α autour de $(0,0)$. Pour quelles valeurs α l'application R_α est diagonalisable? Quelles sont ses valeurs propres, quels sont ses vecteurs propres?
(b) Soit A la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$
Calculer ses valeurs propres et ses vecteur propres. Est-ce que la matrice A est diagonalisable?
(c) Soit B la matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$
Calculer ses valeurs propres et ses vecteur propres. Est-ce que la matrice B est diagonalisable?

6. Soit A la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$
Est-ce que la matrice A est diagonalisable.

Les pages de web du cours: `http://www.cu.lu/~schliche/cours-geo`