Martin Schlichenmaier
Université du Luxembourg

Géométrie et Algèbre Linéaire 2

Feuille d'exercices 2

1. (a) Soit $D = diag(d_1, d_2, \dots, d_n)$ une matrice diagonale. Déterminer D^k pour $k \in \mathbb{N}$.
(b) Soient $A, D, P \in Mat_n(\mathbb{K})$ avec D une matrice diagonale et P une matrice inversible telle que on a $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Déterminer A^k, $k \in \mathbb{N}$.
(c) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

En utilisant (a) et (b) déterminer une formule pour A^k (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
(d) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

En utilisant (a) et (b) déterminer une formule pour A^k (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
(e) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

En utilisant (a) et (b) déterminer une formule pour A^k (pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

2. Les nombres de Fibonacci f_i sont définies dans une manière recursive par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \qquad n \geq 1.$$

Trouver une formule (non-recursive) pour f_n comme une fonction de n. *Suggestion: Déterminer une matrice $A \in Mat_2(\mathbb{R})$, telle que on a*

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \quad .$$

Utiliser les résultats dans 1.

3. Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que la matrice A est diagonalisable? C. à. d., est-ce que on trouve une matrice T inversible, telle que

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D \ ?$$

Si oui, donner les matrices D et T.

4. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(a) Quelles sont les valeur propres de A?

(b) Soient les a_{ii}, $i = 1, 2 \ldots, n$ deux à deux différentes. Montrer que A est diagonalisable.

5. Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable a une et une seule des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C},\ \lambda_1 \neq \lambda_2, \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

6. (a) Soit $f : V \to V$, $\dim V < \infty$, une application linéaire. Soit f diagonalisable. Est-ce que f^n, $n \in \mathbb{N}$ est aussi diagonalisable? Si qui, quelles sont les valeurs propres et les vecteur propres?
(b) Soit $f : V \to V$, $\dim V < \infty$, une application linéaire qui est nilpotente (c.à.d. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$). Montrer que f admet comme seule valeur propre 0. En déduire que si f est diagonalisable et nilpotente, alors $f = 0$.

7. Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice, E_{ij} pour $i, j = 1, \ldots, n$ les matrices élémentaires, $\lambda \in \mathbb{K}$, I_n le matrice d'unit.
(a) Comparer les résultats de 2 produits matricielles $E_{ij}A$ et AE_{ij}.
(b) Démontrer $A = \lambda I_n$ si et seulement si $E_{ij}A = AE_{ij}$, $\forall i, j$.
(c) Démontrer $A = \lambda I_n$ si et seulement si $BA = AB$, $\forall B \in M_n(\mathbb{K})$.
(d) Soit E_{ij} la matrice élémentaire. Trouver deux matrices inversibles C, D telle que on a $E_{ij} = C - D$.
(e) Démontrer $A = \lambda I_n$ si et seulement si $BA = AB$, $\forall B \in M_n(\mathbb{K}), B$ inversible.
(f) Démontrer que A est la seule matrice qui est semblable à A si est seulement si $A = \lambda I_n$.